Analysis 2 - Übungsblatt 8

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Jan-Erik Busse, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis2.php`

Abgabe: 16. Juni, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 8.1 4 Punkte

Sei $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder komplexen Zahlen, $n \in \mathbb{N}$ sowie $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine beliebige diagonalisierbare Matrix.

(a) Zeigen Sie die Identität $\det\left(\mathrm{e}^A\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{spur}(A)}$, wobei die Spur $\mathrm{spur}(A)$ der Matrix A die Summe der Diagonaleinträge von A darstellt.

Hinweis. Sie können die Invarianz der Determinante und Spur unter Ähnlichkeitstransformationen verwenden.

Für die reellen Parameter $0 \le \mu < \omega$ wurde in Aufgabe 7.1 die Differentialgleichung zweiter Ordnung einer gedämpften Schwingung in ein System erster Ordnung umgeschrieben mit

$$\begin{cases} w'(t) = Bw(t) \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ w(0) = w_0 \end{cases} \qquad \text{für} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix}$$

und gewisse Anfangsdaten $w_0 \in \mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass e^{Bt} eine Fundamentalmatrix des linearen Systems bildet und bestimmen Sie diese explizit.

Aufgabe 8.2 4 Punkte

Für $t_0 \in \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen $a, b : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben. Betrachten Sie für $u_0 \in \mathbb{R}^2$ die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) \quad \text{für} \quad t \ge t_0, \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \qquad \text{mit} \quad A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & -b(t) \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Fundamentalmatrix $\Phi : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit der Einheitsmatrix $\Phi(t_0) = I$ der obigen Anfangswertaufgabe, indem Sie das reelle System analog zu Aufgabe 7.4 in eine einzige komplexe lineare Differentialgleichung überführen. Prüfen Sie dabei, ob Ihr so erhaltenes System tatsächlich ein Fundamentalsystem darstellt.

(b) Geben Sie die Lösung für $u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^2$ an.

Bitte wenden!

Aufgabe 8.3 4 Punkte

Für $t_0 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ sei $f : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, welche zusätzlich monoton (fallend) sei, d.h. es gibt eine stetige negative Funktion $\mu : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}_{<0}$ mit

$$(f(t,u) - f(t,v), u - v) \leq \mu(t)\|u - v\|_2^2 \qquad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^n, t \geq t_0$$

für das Euklidsche Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$. Betrachten Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \quad \text{für} \quad t \geq t_0, \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

und nehmen Sie an, das Problem ist für alle $u_0 \in \mathbb{R}^n$ global lösbar auf ganz $[t_0, \infty)$.

(a) Beweisen Sie die Abschätzung

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u_0 - v_0\| \exp\left(\int_{t_0}^t \mu(s)\, \mathrm{d}s\right) \qquad \forall\, t \geq t_0$$

für je zwei Lösungen u, v mit Anfangswerten u_0, v_0 und folgern Sie, dass die Lösungen der Anfangswertaufgabe eindeutig bestimmt sind.

Hinweis. Betrachten Sie die Differenz $\|u - v\|^2$ und verwenden Sie eine Ungleichung von Gronwall.

Betrachten Sie die lineare Funktion

$$f : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f(t,u) = A(t)u + b(t)$$

für stetige Funktionen $A : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie $b : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$.

(b) Zeigen Sie, dass f monoton ist, falls A negativ definit ist, d.h. wenn es eine stetige Funktion $\lambda : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $(-A(t)x, x) \geq \lambda(t)\|x\|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n, t \geq t_0$.

(c) Prüfen Sie speziell die Funktion f auf Monotonie für $n = 2$ und

$$A(t) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad b(t) = 0 \qquad \forall\, t \geq t_0.$$

Gilt für beliebiges $u_0 \in \mathbb{R}^2$ für die entsprechende Lösung $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$?

Aufgabe 8.4 4 Punkte

Betrachten Sie zu $u_0 \in \mathbb{R}^2$ und dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform $J \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Matrix A und eine möglichst einfache invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $AS = SJ$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung u in Abhängigkeit der Anfangsdaten u_0, indem Sie zunächst die Exponentialmatrix e^{At} berechnen.

(c) Untersuchen Sie die Stabilität der stationaren Punkte der autonomen Differentialgleichung $u' = Au$ in Abhängigkeit des Parameters α. Verwenden Sie hierzu die explizite Gestalt der Lösung sowie die Definition im Sinne von Lyapunov.