Analysis 2 - Übungsblatt 7

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Jan-Erik Busse, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis2.php`

Abgabe: 9. Juni, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 7.1 4 Punkte

Untersuchen Sie für die reellen Parameter $0 \leq \mu < \omega$ die folgende lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung einer gedämpften Schwingung

$$\begin{cases} u''(t) + 2\mu u'(t) + \omega^2 u(t) = f(t) \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u_0, \\ u'(0) = v_0, \end{cases}$$

wobei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine stetige äußere Kraft und $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ beliebig seien.

(a) Überführen Sie die Differentialgleichung sowie deren Anfangsbedingungen in ein äquivalentes System 1. Ordnung.

(b) Bestimmen Sie im homogenen Fall $f \equiv 0$ die Lösung u des obigen Systems.

Hinweis: Sie können den komplexen Ansatz $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ verwenden.

(c) Im inhomogenen Fall sei nun das System mit $f(t) = c\cos(\omega t)$ für $c \in \mathbb{R}$ erregt. Bestimmen Sie die Lösung mithilfe des Ansatzes

$$u(t) = a_1 \mathrm{e}^{-\mu t} \cos(\alpha t) + a_2 \mathrm{e}^{-\mu t} \sin(\alpha t) + a_3 p_\mu(t) \sin(\omega t)$$

für geeignete Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$, $\alpha = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$ sowie $p_\mu(t) = 1$ für $\mu > 0$ und $p_\mu(t) = t$ für $\mu = 0$. Untersuchen Sie $\limsup_{t\to\infty} |u(t)|$ in Abhängigkeit von $\mu \in \mathbb{R}_+$.

Aufgabe 7.2 4 Punkte

Gegeben seien ein Intervall $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ für $t_0 < t_1$ sowie $a, b \in \mathbb{R}, b \geq 0$.

(a) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für stetige Funktionen $\varphi \in C(I)$, welche der Integralungleichung

$$\varphi(t) \leq a + b \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\, \mathrm{d}s \qquad \forall\, t \in I$$

genügen, die Abschätzung $\varphi(t) \leq a \exp\left(b(t - t_0)\right)$ für alle $t \in I$ gilt. Zeigen Sie mit einem Gegenbeispiel, dass die Aussage im Allgemeinen nicht gilt, falls $b < 0$ ist.

(b) Seien $\varphi \in C^1(I)$ und stetige Funktionen $\alpha, \beta \in C(I)$ gegeben mit der Differentialungleichung

$$\varphi'(t) \leq \alpha(t) + \beta(t)\varphi(t) \qquad \forall\, t \in I.$$

Zeigen Sie, dass φ die folgende Gronwallsche Ungleichung

$$\varphi(t) \leq \varphi(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \beta(r)\, \mathrm{d}r\right) + \int_{t_0}^{t} \alpha(s) \exp\left(\int_{s}^{t} \beta(r)\, \mathrm{d}r\right) \mathrm{d}s \qquad \forall\, t \in I$$

erfüllt.

Bitte wenden!

Aufgabe 7.3 4 Punkte

Gegeben sei für $n \in \mathbb{N}$ eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die linear beschränkt (bezüglich des 2. Arguments) sei, d.h. es existieren $\alpha, \beta \in C(\mathbb{R})$ mit

$$\|f(t,x)\| \leq \alpha(t)\|x\| + \beta(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Betrachten Sie zu $t_0 \in \mathbb{R}, u_0 \in \mathbb{R}^n$ die nach den Ergebnissen der Vorlesung global lösbare Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \quad \text{für} \quad t \geq t_0, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

(a) Beweisen Sie, dass die globale Lösung eine Abschätzung der Form

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| + \int_{t_0}^t \beta(s)\, \mathrm{d}s + \int_{t_0}^t \alpha(s)\|u(s)\|\, \mathrm{d}s \qquad \forall\, t \in [t_0, \infty)$$

besitzt und folgern Sie die Abschätzung

$$\|u(t)\| \leq \left(\|u_0\| + \int_{t_0}^t \beta(s)\, \mathrm{d}s\right) \exp\left(\int_{t_0}^t \alpha(s)\, \mathrm{d}s\right) \qquad \forall\, t \in [t_0, \infty).$$

(b) Prüfen Sie, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(t,x) = \begin{pmatrix} t|x_1|^{1/3} + \cos(\pi t)x_2 \\ x_2(1 + x_1^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

linear beschränkt ist. Existiert für alle Anfangswerte $u_0 \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung der zugehörige Anfangswertaufgabe?

Aufgabe 7.4 4 Punkte

Für $t_0 \in \mathbb{R}, u_0 \in \mathbb{R}^n$ und $n \in \mathbb{N}$ seien stetige Funktionen $A : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ gegeben. Betrachten Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + b(t) \quad \text{für} \quad t \geq t_0, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Anfangswertaufgabe eine eindeutige, globale Lösung besitzt.

(b) Gegeben sei die matrixwertige Funktion

$$A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad t \mapsto A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

und $b \equiv 0$. Bestimmen Sie die explizite Lösung $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ der zugehörigen Anfangswertaufgabe zum Startvektor $u(0) = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ indem Sie das reelle System in eine einzige komplexe lineare Differentialgleichung $z'(t) = c(t)z(t)$ für ein geeignetes $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ überführen, wobei $z(t) = u_1(t) + \mathrm{i}u_2(t)$.