Analysis 2 - Übungsblatt 3

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Jan-Erik Busse, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis2.php`

Abgabe: 12. Mai, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 3.1 4 Punkte

Seien $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder komplexen Zahlen, $n \in \mathbb{N}$ und für Vektoren $x \in \mathbb{K}^n$ bezeichne $\|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$ die Maximumsnorm.

(a) Zeigen Sie, dass jede von einer beliebigen Vektornorm $\|\cdot\|$ erzeugte, natürliche Matrixnorm äquivalent ist zu der von der Maximumsnorm erzeugten Matrixnorm, d.h. dass es $m, M > 0$ gibt mit

$$m\|A\|_\infty \leq \|A\| \leq M\|A\|_\infty \qquad \forall\, A \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

(b) Beweisen Sie, dass der $\mathbb{K}$-Vektorraum der $\mathbb{K}^{n\times n}$-Matrizen mit der von einer beliebigen Vektornorm induzierten Matrixnorm $\|\cdot\|$ vollständig ist.

(c) Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ definiere man $A^0 := E_n$ mit der Einheitsmatrix E_n und die Partialsummen

$$S_m := \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(S_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ bezüglich einer beliebigen, von einer Vektornorm induzierten Matrixnorm konvergiert und der Grenzwert $\mathrm{e}^A := \lim_{m\to\infty} S_m$ die Abschätzung $\|\mathrm{e}^A\| \leq \mathrm{e}^{\|A\|}$ erfüllt.

Aufgabe 3.2 4 Punkte

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = |xy|$.

(a) Untersuchen Sie die Funktion f auf partielle sowie totale Differenzierbarkeit und geben Sie den Gradienten von f an, wo er existiert.

(b) In welchen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Funktion f stetig, in welchen Punkten der Gradient ∇f?

Bitte wenden!

Aufgabe 3.3 4 Punkte

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g : D \to \mathbb{R}$ sowie $v : D \to \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbare Funktionen und für $x, y \in \mathbb{R}^n$ das Euklidsche Skalarprodukt mit $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie für den Gradienten und die Divergenz folgende Identitäten in D:

$$\nabla(f \cdot g) = g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g \qquad \text{und} \qquad \operatorname{div}(f \cdot v) = (\nabla f, v) + f \cdot \operatorname{div}(v).$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare und bezüglich des Nullpunkts rotationssymmetrische Funktion, d.h. wir finden eine zweimal differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(\|x\|_2)$ mit der üblichen Euklidschen Norm gemäß

$$\|x\|_2^2 := \sum_{i=1}^n x_i^2 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass g genau dann der Differentialgleichung

$$g''(r) + \frac{n-1}{r} g'(r) = 0 \qquad \forall\, r > 0$$

genügt, falls f harmonisch ist, d.h. $\Delta f = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ erfüllt.

(c) Betrachten Sie die Funktionen

$$f_n : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \ln(\|x\|_2) & \text{für} \quad n = 2, \\ \|x\|_2^{-(n-2)} & \text{für} \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Prüfen Sie, ob f_n für $n \geq 2$ harmonisch ist. Welche Gestalt hat eine harmonische Funktion für $n = 1$?

Aufgabe 3.4 4 Punkte

Gegeben sei die durch

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(x^2 - y^2)$$

definierte Funktion.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten sowie die Hesse-Matrix der Funktion f.

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom bis zur 2. Ordnung um den Entwicklungspunkt $(x, y) = (1, 0)$.

(c) Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion f.