Analysis 2 - Übungsblatt 13

Sommersemester 2017
Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Jan-Erik Busse, Chris Kowall
Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis2.php`

Abgabe: keine, unbewertetes Blatt

Aufgabe 13.1

Geben Sie kurze, präzise Antworten auf die folgenden Fragen ohne Begründungen.

(1) Sei M eine Menge. Wie ist eine Metrik d auf M definiert?

(2) Wie lautet die Jacobi-Matrix einer differenzierbaren Abbildung $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?

(3) Wann heißt eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar in $x \in D$?

(4) Wie ist die Stabilität (im Sinne von Lyapunov) eines stationären Punktes einer autonomen gewöhnlichen Differentialgleichung definiert?

(5) Definieren Sie eine Jordan-Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 13.2

(a) Seien (X_i, d_i) metrische Räume für alle $i = 1, \dots, n$. Sei $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ und wir definieren die Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i),$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ sind. Zeigen Sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

(b) Sei nun $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein (nicht unbedingt endlich dimensionaler) $\mathbb{R}$-Hilbertraum. Beweisen Sie, dass das Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$$

bzgl. der in der Aufgabe (a) definierten Metrik und Standardmetrik in $\mathbb{R}$ stetig ist.

Hinweis. Nicht jede multilineare Abbildung in unendlich dimensionalen Vektorräumen ist stetig. Benutzen Sie die Folgenstetigkeit.

Aufgabe 13.3

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Überprüfen Sie die Funktion auf Stetigkeit sowie partielle und totale Differenzierbarkeit.

Bitte wenden!

Aufgabe 13.4
Seien $(X, ||\cdot||)$ ein Banachraum, $\overline{U}_\varepsilon(0)$ die abgeschlossene ε-Kugel um den Nullpuinkt zu $\varepsilon > 0$ und $f\colon \overline{U}_\varepsilon(0) \to X$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante $L < 1$ und $f(0) = 0$. Dann betrachten wir die Abbildung

$$F\colon \overline{U}_\varepsilon(0) \to X, \quad x \mapsto x + f(x).$$

Zeigen Sie:

(a) F ist injektiv.

(b) Es gibt genau eine Lipschitz-stetige Abbildung

$$g\colon \overline{U}_{\varepsilon(1-L)}(0) \to X,$$

mit L-Konstante $\frac{L}{1-L}$ und $g(0) = 0$, sodass $F \circ G = \mathrm{id}_{\overline{U}_{\varepsilon(1-L)}(0)}$, wobei

$$G\colon \overline{U}_{\varepsilon(1-L)}(0) \to X, \quad x \mapsto x + g(x).$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass der Vektorraum

$$W := \{u\colon \overline{U}_r(0) \to X \mid u \text{ ist Lipschitz-stetig mit } L\text{-Konstante } \alpha \text{ und } u(0) = 0\}$$

für feste $r, \alpha > 0$ vollständig bzgl. der Supremumsnorm ist.

Aufgabe 13.5
Lösen Sie die folgenden Extremwertaufgaben.

(a) Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y) = 5x^3 + y^2 - 6y - 15x$ auf lokale Extremstellen in $\mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie die Art der Extremstellen.

(b) Bestimmen Sie den maximalen Wert, den die Funktion $f(x, y) := xy^2$ auf

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

annimmt, mit Hilfe der Methode von Lagrange.

Aufgabe 13.6
Beweisen Sie, dass eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ von Null existiert, in der es eine eindeutige, stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ gibt, die der Gleichung

$$\mathrm{e}^{2x\cos(f(x))} + \mathrm{e}^{f(x)\cos(2x)} = 2$$

auf U genügt mit $f(0) = 0$. Berechnen Sie außerdem $f'(0)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 13.7
Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $u_0 \in \mathbb{R}$ die folgende Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} u'(t) = \cos(t)\mathrm{e}^{u(t)} \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Prüfen Sie in Abhängigkeit von $u_0 \in \mathbb{R}$, ob die Anfangswertaufgabe eine lokal oder global eindeutige Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$ besitzt. Geben Sie diese sowie ihr maximales Existenzintervall jeweils an.

Aufgabe 13.8
Betrachten Sie das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x' &= x^2 - x, \\ y' &= yx - 2y. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die stationären Punkte der Differentialgleichung und untersuchen Sie diese auf Stabilität sowie asymptotische Stabilität.

Aufgabe 13.9
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar.

(a) Sei $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar und f Lebesgue-integrierbar mit $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$. Zeigen Sie, dass $f < \infty$ fast überall in Ω gilt.

(b) Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge von messbaren, Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega |f_k(x)|\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Beweisen Sie mithilfe von Aufgabenteil (a), dass

$$f := \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

fast überall in Ω (absolut) konvergiert und die folgende Identität gilt:

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$