Analysis 2 - Übungsblatt 11

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Jan-Erik Busse, Chris Kowall

Internetseite: `http://www.biostruct.uni-hd.de/Analysis2.php`

Abgabe: 7. Juli, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 11.1 4 Punkte

Sei (M,d) ein metrischer Raum und $T \subset M$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in M$ heißt *Randpunkt von* T, falls für jedes $\varepsilon > 0$

$$T \cap K_\varepsilon(x) \neq \emptyset \qquad \text{sowie} \qquad (M \setminus T) \cap K_\varepsilon(x) \neq \emptyset$$

gilt. Die Menge der Randpunkte von T heißt der *Rand von* T und wird mit ∂T bezeichnet. Außerdem sei durch $T^\circ := T \setminus \partial T$ das *Innere* bzw. der *offene Kern* von T definiert.

(a) Zeigen Sie $\overline{T} = T \cup \partial T$ für den Abschluss $\overline{T}$ von T in M.

(b) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ im metrischen Raum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ den Rand, das Innere sowie den Abschluss für die Mengen

(i) $T_1 := \{x \in \mathbb{Q}^n \mid \|x\|_\infty < 1\}$,

(ii) $T_2 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \chi(x) < 1\}$ für die Funktion

$$\chi : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in (-1,1)^n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 11.2 4 Punkte

Seien $M, N \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Mengen.

(a) Zeigen Sie für den äußeren bzw. inneren Jordan-Inhalt die folgenden Aussagen:

(i) $M \subset N$ impliziert $|M|_a \leq |N|_a$ sowie $|M|_i \leq |N|_i$.

(ii) $|M|_a = |\overline{M}|_a$ sowie $|M|_i = |M^\circ|_i$.

In manchen Fällen ist es sinnvoll eine spezielle Überdeckung zu verwenden. Dazu betrachten Sie die Punkte $p \in \mathbb{Z}^n$ im kartesischen Koordinatensystem $\mathbb{R}^n$ als Eckpunkte von Würfeln der Kantenlänge 1, sogenannte Einheitswürfel. Halbiert man sukzessive deren Kantenlänge erhält man Würfel der Kantenlänge 2^{-k} mit Eckpunkten $2^{-k}p$ für gewisse $p \in \mathbb{Z}^n$. Für ein $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir die Menge aller solcher Würfel der k-ten Stufe mit W_k und setzen als zugehörige Untersumme bzw. Obersumme von M

$$M_k := \bigcup_{\substack{W \in W_k, \\ W \subset M}} W \qquad \text{bzw.} \qquad M^k := \bigcup_{\substack{W \in W_k, \\ W \cap M \neq \emptyset}} W.$$

(b) Beweisen Sie mit obiger Notation

$$\lim_{k\to\infty} |M_k| = |M|_i \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{k\to\infty} |M^k| = |M|_a.$$

und folgern Sie die Identität $|M|_i + |\partial M|_a = |M|_a$.

Bitte wenden!

Aufgabe 11.3 4 Punkte

Gegeben sei eine unendliche Menge X und

$$\mathcal{A} := \{A \subset X \mid A \text{ ist endlich oder } X \setminus A \text{ ist endlich}\}.$$

(a) Beweisen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Mengen-Algebra ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ keine σ-Algebra ist.

Aufgabe 11.4 4 Punkte

Für $n \in \mathbb{N}$ ist durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^n$$

eine Relation auf $\mathbb{R}^n$ gegeben.

(a) Machen Sie sich klar, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation darstellt.

Da zwei Äquivalenzklassen entweder identisch oder disjunkt sind, schreiben wir das n-dimensionale Einheitsintervall $[0,1]^n$ als Vereinigung disjunkter Äquivalenzklassen $\mathcal{E}_i$ (wobei I eine gewisse Indexmenge ist)

$$[0,1]^n = \bigcup_{i \in I} \mathcal{E}_i.$$

Sei nun N eine Menge, die aus jeder der Äquivalenzklassen $\mathcal{E}_i$ genau ein Element enthalte und $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Aufzählung aller rationalen Zahlen im Intervall $[-1,1]^n$.

(b) Zeigen Sie, dass die Mengen $N_k := N + r_k, k \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt sind und

$$[0,1]^n \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k \subset [-1,2]^n$$

erfüllen.

(c) Beweisen Sie, dass $N \subset \mathbb{R}^n$ nicht Lebesgue-messbar ist.

Bemerkung. Die Existenz der Menge N folgt aus dem sogenannten Auswahlaxiom.