Universität Heidelberg Sommersemester 2017

Aufgabenblatt 3 6. Juli 2017

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Methoden in der Systembiologie

Dr. M. V. Barbarossa

Aufgaben zu den Themen: Systeme von nichtlineare Rekursionsgleichungen, Gewöhnliche Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme

---

Aufgabe 1

Betrachte folgendes System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}x = -x + y$$
$$\frac{d}{dt}y = 2x - y$$

a) Schreibe das System in Matrix-Vektor-Form, $z(t)' = Az(t)$. Berechne die Eigenwerte von A, λ_1, λ_2, und die dazugehörige Eigenvektoren v_1, v_2.

b) Erstelle ein Phasenportait (in der (x, y)-Ebene). Stelle dazu den Phasenfluss auf den Nullklinen und auf den von den Eigenvektoren von A erzeugten Geraden durch Pfeile dar und skizziere, wie die Trajektorien ungefähr verlaufen müssen.

c) Welche Fixpunkte besitzt das Systems? Bestimme die Stabilitätseigenschaften aller Fixpunkten.

d) Formuliere die allgemeine Lösung des Systems

$$z(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

.

Aufgabe 2

Gegeben ein lineares Gleichungssytsem von gewöhnlichen Differentialgleichungen $z(t)' = Az(t)$, mit $z(t) = (x(t), y(t))$, bestimme das Verhalten der Lösung wenn die Matrix A ist

1. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 Lineare Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Betrachte folgendes System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= x(t) - y(t),\\ \frac{d}{dt}y(t) &= -2y(t).\end{aligned}$$

(i) Schreibe das System in Matrix-Vektor-Form mit Matrix A.

(ii) Erstelle ein Phasenportrait. Stelle dazu den Phasenfluss auf den Nullklinen und auf den von den Eigenvektoren von A erzeugten Geraden durch Pfeile dar und skizziere, wie die Trajektorien ungefähr verlaufen müssen.

(iii) Identifiziere den Fixpunkt des Systems. Ist dieser stabil?

(iv) Formuliere nun die allgemeine Lösung des Systems mit Anfangswert $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

Aufgabe 4 Systeme von nichtlineare Rekursionsgleichungen

In einem Gebiet seien Beutetiere und Raubtiere vorhanden. Die Populationsdichten seien x bzw. y. Wir nehmen an, dass beide Arten getrennte Generationen haben. Die Dichten in aufeinanderfolgenden Generationen seien $x_0, x_1, x_2, ...$ bzw. $y_0, y_1, y_2, ...$. Die Interaktion zwischen den zwei Populationen sei beschrieben durch das System

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n) := (1+\alpha)x_n - \beta\delta x_n^2 - \gamma\delta x_n y_n,\\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n) := \delta x_n y_n,\end{aligned} \tag{1}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

- Erkläre die biologische Bedeutung des Gleichungssystem (1).
- Bestimme die Gleichgewichstpunkte des Systems (1), d.h. die Punkte $(\bar{x}, \bar{y})$ so dass

$$\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f(\bar{x},\bar{y})\\ g(\bar{x},\bar{y})\end{pmatrix}.$$

  Erkläre die biologische Bedeutung der Fixpunkten.

Um die Stabilität der Fixpunkten zu bestimmen, benötigen wir die Matrix der Ableitungen

$$J(x,y) = \begin{pmatrix}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\end{pmatrix},$$

wobei $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ die Ableitung der Funktion f nur nach der Variabel x bezeichet (die andere „partielle Ableitungen“werden entsprechend definiert).

Für einen Fixpunkt $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ berechnen wir die Eigenwerte der Matrix $J_1 = J(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ (d.h. die Matrix J wird an dem Fixpunkt ausgewertet). Sind alle Eigenwerte der Matrix J_1 im Betrag kleiner als 1, dann ist der Fixpunkt $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ lokal asymptotisch stabil. Wenn es einen Eigenwert λ der Matrix J_1 gibt, so dass $|\lambda| > 1$, dann ist der Fixpunkt $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ instabil.

Bestimme nun die Stabilität aller Fixpunkten im Abhängigkeit von α und β.

Aufgabe 5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}y(t) = t^2 y(t).$$

(i) Beweise, dass für $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ die Lösung der Gleichung zu gegebenem Anfangswert $y(t_0) = y_0$, $t_0 \in [a,b]$, eindeutig ist.

(ii) Berechne die explizite Lösung der Gleichung für $t_0 = 0$ und $y_0 = 1$.

Aufgabe 6 Lineare Gleichungssysteme (Wiederholung)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

für $a, b \in \mathbb{R}$. Für welche Parameter a, b hat das Gleichungssystem $Ax = B$ genau eine Lösung? Könnte es sein, dass es unendlich viele Lösungen gibt? Begründe Deine Antwort.