Universität Heidelberg Sommersemester 2017

Aufgabenblatt 2 23. Juni 2017

Übungen zur Vorlesung

# Mathematische Methoden in der Systembiologie

Dr. M. V. Barbarossa

Aufgaben zu den Themen: Matrizen, Determinanten, Eigenwerte, Lineare Gleichungssysteme

---

## Aufgabe 1 (Rechnen mit Matrizen)

Berechne:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}^T$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \right]$

## Aufgabe 2 (Basis eines Vektorraums)

Untersuche, ob folgende Vektoren jeweils eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ bilden. Begründe Deine Antwort.

a)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

b)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

## Aufgabe 3 (Rang einer Matrix)

a) Bestimme den Rang folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \\ 6 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimme, für jeden Wert des Parameters $t \in \mathbb{R}$, den Rang der Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t & t-1 & 0 \\ t & 2t-2 & 2t-2 \end{pmatrix}.$$

BITTE WENDEN!

Aufgabe 4 (Lineare Gleichungssysteme)

Aloisius möchte sich ausschließlich von Weißbier, Brezn und Weißwürsten ernähren. Die folgende Tabelle gibt den Nährstoffgehalt der einzelnen Lebensmittel sowie den gesamten Tagesbedarf an:

| | Eiweiß | Kohlenhydrate | Fett |
|---|---|---|---|
| 1/2 l Weißbier | 3.2 | 28 | 0 |
| 1 Breze | 3.6 | 27 | 0 |
| 1 Weißwurst | 7.6 | 0 | 15 |
| Tagesbedarf | 66 | 165 | 90 |

Frage: Wieviel darf Aloisius von den einzelnen Lebensmitteln essen und in welcher Kombination, um genau seinen Tagesbedarf zu decken?

Formuliere die Fragestellung als lineares Gleichungssystem [*Hinweis:* Sei $x_1$ die Anzahl der Weißbiere etc.] und löse es.

Aufgabe 5 (Lineare Gleichungssysteme)

1. Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax_1 + 4x_2 + 5x_3 &= a \\ x_1 + ax_2 - 2x_3 &= 1 \\ -2x_1 - 2ax_2 + a^2x_3 &= a \end{aligned}$$

   keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen? Benutze den Gauß-Algorithmus um das System zu lösen.

2. Bestimme $\beta \in \mathbb{R}$ so, dass das System

$$\begin{aligned} \beta x + 3y - 2z &= 0 \\ (\beta - 1)y + 7z &= 0 \\ (\beta + 2)z &= 0 \end{aligned}$$

   eine nichttriviale Lösung besitzt.

Aufgabe 6 (Determinante einer Matrix)

Berechne die Determinante folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{4+3i} & i \\ -i & \frac{5}{4-3i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2+i & 2i & -2i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & i-1 & 2-i \end{pmatrix}.$$

BITTE WENDEN!

# Wiederholung: Nichtlineare Rekursionsgleichungen

Aufgabe 8

Gegeben sei die Differenzengleichung

$$P_{t+1} = 2P_t - \frac{3P_t}{1+2P_t}.$$

Finde die Gleichgewichtspunkte und bestimme deren Stabilität. Bestimme die Lösung graphisch, mit Anfangswert $P_0 = 1/2$ bzw. $P_0 = 3/2$.

Aufgabe 9

Die folgende nach *Pilou* benannte nichtlineare Rekursionsgleichung ist eine Variante der diskreten logistischen Gleichung:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1+\beta x_n}, \ \ \alpha > 1, \ \beta > 0.$$

Berechne alle Fixpunkte der Gleichung und untersuche deren Stabilität analytisch. Zeige graphisch, dass der positive Fixpunkt asymptotisch stabil ist für $\alpha = 2$ und $\beta = 1$.