Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 8

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Chris Kowall

`http://www.biostruct.uni-hd.de/PartielleDifferentialgleichungen.php`

Abgabe: 18. Dezember, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 8.1 4 Punkte

(a) Sei $\phi : [k_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ für $k_0 \in \mathbb{R}$ eine Funktion und erfülle die Wachstumsbeschränkung

$$\forall\, h > k \geq k_0 : \quad \phi(h) \leq \frac{C}{(h-k)^\alpha} \phi(k)^\beta \tag{1}$$

mit $\alpha, \beta, C > 0$ als Konstanten. Dann gilt für $\beta > 1$

$$\phi(k_0 + d) = 0 \quad \text{mit} \quad d^\alpha = C \cdot \phi(k_0)^{\beta - 1} \cdot 2^{\frac{\alpha\beta}{\beta - 1}}. \tag{2}$$

Hinweis. Betrachten Sie die Folge $(k_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ für $k_i := k_0 + d(1 - 2^{-i})$ und zeigen Sie $\phi(k_i) \to 0$ für $i \to \infty$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u \in L^2(\Omega)$. Definiere für $k \in \mathbb{R}_+$ die messbare Menge $A(k) := \{x \in \Omega \mid |u(x)| > k\} \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass für $h > k \geq 0$ und $v_k := \operatorname{sign}(u) \cdot \max(|u| - k, 0) \in L^2(\Omega)$

$$|A(h)| \leq \frac{1}{(h-k)^2} \int_{A(k)} |v_k(x)|^2 \,\mathrm{d}x$$

gilt und insbesondere $|A(k)| \to 0$ für $k \to \infty$ folgt.

Aufgabe 8.2 4 Punkte

Seien $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung des elliptischen Randwertproblems

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j} u) + \sum_{i=1}^n b_i(x)\partial_{x_i} u = f(x) & \text{in} \quad \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

für gleichmäßig elliptisches $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ sowie $b_i \in L^\infty(\Omega)$ und $f \in L^p(\Omega)$ für $p > n$.

(a)* Verifizieren Sie mit den bereits bewiesenen Einbettungssätzen die Abschätzung

$$\|v_k\|_{L^2(A(k))} \leq C \|\nabla v_k\|_{L^2(A(k))} |A(k)|^{\frac{1}{n}}$$

für

$$v_k := \operatorname{sign}(u) \cdot \max(|u| - k, 0) \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

mit $A(k)$ aus Aufgabe 8.1.

(b) Zeigen Sie, dass ein von u, f unabhängiges $C > 0$ gibt mit

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}). \tag{4}$$

Hinweis. Testen Sie für hinreichend große $k \geq k_0 = \overline{k} \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)}$ die schwache Formulierung mit v_k und schätzen Sie unter Verwendung von Teilaufgabe (a) und Aufgabe 8.1 die Funktion $\phi(k) := |A(k)|$ geeignet ab.

Bitte wenden!

Aufgabe 8.3 4 Punkte

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei L gleichmäßig elliptisch mit

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i}u + c(x)u$$

und stetigen Koeffizienten $a_{ij}, b_i, c \in C(\Omega)$ sowie $b_i \in L^\infty(\Omega)$.

(a) Zeigen Sie die folgenden Aussagen für $c \geq 0$:

(i) Erfüllt $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ die Differentialgleichung $Lu = 0$, so gilt

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

(ii) Erfüllen $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ die Ungleichungen

$$\begin{cases} Lu \leq Lv & \text{in} \quad \Omega, \\ u \leq v & \text{auf} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

so folgt $u \leq v$ in $\overline{\Omega}$.

(b) Machen Sie sich an einem Beispiel klar, dass die Voraussetzung $c \geq 0$ für das schwache Maximumprinzip notwendig ist.

Die mit * gekennzeichneten Aufgabenteile werden nicht bewertet.