Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 7

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Chris Kowall

http://www.biostruct.uni-hd.de/PartielleDifferentialgleichungen.php

Abgabe: 11. Dezember, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 7.1 4 Punkte

Sei $n \in \mathbb{N}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ sowie $|\Omega| > 0$. Betrachten Sie zu $f \in L^2(\Omega)$ das elliptische Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in} \quad \Omega, \\ \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

wobei ν das äußeren Einheitsnormalenfeld bezeichne.

(a) Verifizieren Sie, dass (1) keine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ haben kann, falls gilt:

$$\langle f \rangle_\Omega := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x)\, \mathrm{d}x \neq 0.$$

(b) Sei $\langle f \rangle_\Omega = 0$. Zeigen Sie, dass (1) eine bis auf additiven Konstanten eindeutige Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ besitzt. Beweisen Sie hierfür, dass es im Vektorraum

$$W_N^{1,2}(\Omega) := \{u \in W^{1,2}(\Omega) \mid \langle u \rangle_\Omega = 0\}$$

eine eindeutige Lösung gibt und diese eine Abschätzung der Form

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

mit einer von f, u unabhängigen Konstanten $C > 0$ erfüllt.

Hinweis. Zeigen Sie, dass $W_N^{1,2}(\Omega)$ mit $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}$ ein Hilbertraum ist. Sie können ohne Beweis die für beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$ gültige Poincaré-Ungleichung für $1 \leq p < \infty$ verwenden, wobei $C_P > 0$ unabhängig von u ist:

$$\|u - \langle u \rangle_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{2}$$

Aufgabe 7.2 4 Punkte

(a) Betrachten Sie die offenen Mengen Ω_i definiert durch

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \{(x, y) \in (0, 1)^2 \mid y < \sqrt{x}\}, \\ \Omega_2 &:= (0, 1)^2 \setminus \overline{\Omega_1} \end{aligned}$$

und untersuchen Sie, ob die Mengen einen Lipschitz-Rand $\partial\Omega_i \in C^{0,1}$ besitzen.

Hinweis. Machen Sie sich klar, dass sich an ein Lipschitz-Rand notwendigerweise ein schmaler Kreissektor mit positivem Winkel anlegen lässt, der ganz in Ω liegt.

(b) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, dass $\Omega := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ einen C^∞-Rand besitzt, d.h. $B_1(0)$ hat C^m-Rand für alle $m \in \mathbb{N}$.

Dabei heißt für eine offene und beschränkte Menge Ω der Rand $\partial\Omega$ von der Klasse $C^{0,\alpha}$ für ein $\alpha \in (0, 1]$, falls es für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ ein $r > 0$ gibt und eine $C^{0,\alpha}$-Funktion $\gamma : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, sodass nach eventueller Umnummerierung bzw. Umorientierung der Koordinatenachsen $\Omega \cap B_r(x_0)$ oberhalb des Graphen von γ liegt, d.h.

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) \mid x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 7.3 4 Punkte

Seien $m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{m+2}$. Sei $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung des elliptischen Randwertproblems

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j}u) + \sum_{i=1}^n b_i(x)\partial_{x_i}u + c(x)u = f(x) & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

für gleichmäßig elliptisches $a_{ij} \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$ sowie $b_i, c \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$ und $f \in W^{m,2}(\Omega)$. Zeigen Sie per Induktion, dass dann bereits $u \in W^{m+2,2}(\Omega)$ gilt mit

$$\|u\|_{W^{m+2,2}(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{W^{m,2}(\Omega)}), \tag{4}$$

wobei $W^{0,2}(\Omega) := L^2(\Omega)$ und $C > 0$ sei. Konzentrieren Sie sich dabei auf den Beweis der Randabschätzungen und beschreiben Sie die übrigen Schritte wie in der Vorlesung nur skizzenhaft.