Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 4

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Chris Kowall

http://www.biostruct.uni-hd.de/PartielleDifferentialgleichungen.php

Abgabe: 20. November, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 4.1 4 Punkte

(a) Finden Sie für $n \in \mathbb{N}$ alle radialsymmetrischen Lösungen $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ mit $\Phi(x) = v(|x|)$ der Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi(x) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Dabei induziert wie üblich $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ die Euklidsche Norm auf $\mathbb{R}^n$.

(b) Betrachten Sie für $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

und zeigen Sie $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 4.2 4 Punkte

Betrachten Sie das elliptische Randwertproblem

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j}(a_{ij}\partial_{x_i}u) + \sum_{j=1}^n b_j \partial_{x_j} u + cu = f & \text{in} \quad \Omega, \\ \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\partial_{x_i}u)\nu_j = 0 & \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

auf einer offenen und beschränkten Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, welche die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes erfüllt (etwa $\partial\Omega \in C^1$, wobei ν das äußere Einheitsnormalenfeld bezeichne). Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine klassische Lösung zu $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), b_j, c, f \in C(\Omega)$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

(a) Leiten Sie die Variationsgleichung einer schwachen Lösung her für Testfunktionen $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ und erläutern Sie, inwieweit die Regularität der beteiligten Funktionen in der schwachen Formulierung abgeschwächt werden kann, sodass diese wohldefiniert bleibt.

(b) Verwenden Sie das Fundamentallemma der Variationsrechnung (siehe Lemma 2.59 aus dem Skript Funktionalanalysis), um zu beweisen, dass eine schwache Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ auch das Randwertproblem im klassischen Sinn erfüllt, d.h. in jedem Punkt von Ω bzw. $\partial\Omega$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4.3 4 Punkte

Für $m, n \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty$ sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^m$ und $\Omega \subset\subset \Omega'$ für ein offenes $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass es eine Fortsetzung

$$F : W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

mit den folgenden Eigenschaften für $u \in W^{m,p}(\Omega)$ gibt:

(i) $F(u) = u$ f.ü. in Ω.

(ii) $F(u) = 0$ f.ü. außerhalb von Ω'.

(iii) Es gibt ein $C = C(m, p, \Omega, \Omega') > 0$ mit

$$\|F(u)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Bearbeiten Sie hierfür die folgenden Schritte:

(a) Folgern Sie, dass es endlich viele bijektive C^m-Abbildungen $\Phi^i, \Psi^i = (\Phi^i)^{-1}$ gibt, welche den Rand lokal aufbiegen. Das heißt es gibt offene Umgebungen $U_1, \ldots, U_k \subset \mathbb{R}^n$ von Randpunkten sowie entsprechende offene Kugeln $V_i := B_{r_i}(y^i)$ mit Mittelpunkten y^i und $y^i_n = 0$, sodass $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$ mit $\Phi^i : U_i \to V_i$ und

$$V_i^+ := V_i \cap \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_n \geq 0\} = \Phi^i(U_i \cap \overline{\Omega}).$$

(b) Betrachten Sie für $u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{m,p}(\Omega)$ die Funktionen $v_i := u \circ \Psi^i$ auf V_i^+ und setzen Sie diese mithilfe von Aufgabe 3.3 (b) auf ganz V_i fort. Konstruieren Sie eine Fortsetzung $\overline{u}_i$ von u auf U_i mit

$$\|\overline{u}_i\|_{W^{m,p}(U_i)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Sie können dabei ohne Beweis verwenden, dass bei einer Variablentransformation mit einem C^m-Diffeomorphismus die $W^{m,p}$-Normen in äquivalenter Weise abgeschätzt werden können.

(c) Wählen Sie eine offene Menge $U_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $U_0 \subset\subset \Omega$, sodass $\overline{\Omega}$ von $U_0, \ldots, U_k$ überdeckt wird, und wählen Sie eine zugehörige Zerlegung der Eins $(\eta_i)_{i=0,\ldots,k}$ mit $\eta_i \in C_c^\infty(U_i)$ und $\sum_{i=0}^k \eta_i = 1$ (Siehe Korollar 2.9 aus dem Skript Funktionalanalysis). Betrachten Sie mit $\overline{u}_0 := u$ die Fortsetzung

$$\overline{u} := \sum_{i=0}^k \eta_i \overline{u}_i \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}^n$$

und verfizieren Sie (i)-(iii) im Fall $u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{m,p}(\Omega)$.

(d) Definieren Sie F auf $W^{m,p}(\Omega)$ und verwenden Sie dabei ohne Beweis, dass es für $\partial\Omega \in C^1$ und $u \in W^{m,p}(\Omega)$ eine Folge $(u_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ gibt, welche in $W^{m,p}(\Omega)$ gegen u konvergiert.