Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 3

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Chris Kowall

`http://www.biostruct.uni-hd.de/PartielleDifferentialgleichungen.php`

Abgabe: 13. November, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 3.1 4 Punkte

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} uu_x + u_t = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u(r,1) = g(r) & \text{für} \quad r \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

auf $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 1\}$. Eine unstetige, jedoch stückweise differenzierbare Lösung $u_1 \in L^\infty(\Omega)$ von (1) für

$$g(r) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad r < 1, \\ 0 & \text{für} \quad r > 1 \end{cases}$$

lässt sich durch $u_1(x,t) = g(x)$ wählen. Um eine schwache Lösung u_2 von (1) zu konstruieren, nehmen wir an, u_2 besitze eine Unstetigkeitskurve Γ der Form $x = s(t)$.

(a) Finden Sie die durch u_1 induzierte Anfangsbedingung $s(1)$ der Unstetigkeitskurve und konstruieren Sie daraus eine schwache Lösung $u_2 \in L^\infty(\Omega)$ von (1). Verwenden Sie zur Verifikation der letzten Aussage die schwache Formulierung entsprechend für den Startwert $t = 1$.

(b) Prüfen Sie, ob u_1 eine schwache Lösung ist von (1) ist.

Bemerkung. Dieses Beispiel lässt sich verwenden, um eine globale schwache Lösung des Problems aus Aufgabe 2.2 zusammen zu setzen. Aufgabe 2.2 stellt ein einfaches Beispiel der Erzeugung einer Schockwelle dar.

Aufgabe 3.2 4 Punkte

Finden Sie verschiedene Lösungen zur Burgers-Gleichung

$$\begin{cases} uu_x + u_t = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u(r,0) = g(r) & \text{für} \quad r \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

auf $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$ zu stückweise konstanten Anfangsdaten

$$g(r) = \begin{cases} u_\ell & \text{für} \quad r < 0, \\ u_r & \text{für} \quad r > 0 \end{cases}$$

für $u_\ell, u_r \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq u_\ell < u_r$:

(a) Finden Sie ein bestimmtes $s \in \mathbb{R}$, sodass u_1 gegeben durch

$$u_1(x,t) = \begin{cases} u_\ell & \text{für} \quad x < st, \\ u_r & \text{für} \quad x > st \end{cases}$$

eine unstetige, schwache Lösung $u_1 \in L^\infty(\Omega)$ darstellt.

Bitte wenden!

Da mit einer Lösung $u = u(x,t)$ ebenfalls u_λ mit $u_\lambda(x,t) = u(\lambda x, \lambda t)$ für jedes $\lambda > 0$ eine Lösung ist, betrachten Sie die Variable $\xi = x/t$:

(b) Finden Sie eine schwache Lösung $u_2 = u_2(x,t) = u_3(\xi)$, welche das obige Anfangswertproblem in Ω löst und dort stetig ist, obwohl die Anfangsdaten unstetig sind.

Aufgabe 3.3 4 Punkte

Seien $1 \leq p < \infty, n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n), \qquad u \mapsto \begin{cases} u & \text{in} \quad \Omega, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wohldefiniert und linear ist sowie normerhaltend ist, d.h.

$$\|F(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

erfüllt.

(b)* Seien $m \in \mathbb{N}$ und $u \in C^m(B_+) \cap W^{m,p}(B_+)$ für eine offene Kugel $B \subset \mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt $y \in \mathbb{R}^n$ und Radius $R > 0$ gegeben, sodass $y_n = 0$ gelte. Definiere

$$B_+ := B \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\} \qquad \text{und} \qquad B_- := B \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \leq 0\}.$$

Seien $c_1, \ldots, c_{m+1}$ Lösungen des Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^{m+1} (-k)^{-j} c_k = 1 \qquad \text{für} \quad j = 0, \ldots, m$$

und die Fortsetzung von u auf B mittels Spiegelung definiert durch

$$\overline{u}(\tilde{x}, x_n) := \begin{cases} u(\tilde{x}, x_n) & \text{falls} \quad x_n \geq 0, \\ \sum_{k=1}^{m+1} c_k u(\tilde{x}, -k^{-1} x_n) & \text{falls} \quad x_n < 0, \end{cases}$$

wobei $\tilde{x} := (x_1, \ldots, x_{n-1})$ sei. Zeigen Sie, dass $\overline{u} \in C^m(B) \cap W^{m,p}(B)$ gilt und es ein $C = C(m,n,p) > 0$ gibt mit

$$\|\overline{u}\|_{W^{m,p}(B)} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(B_+)}.$$

* Die mit gekennzeichneten Aufgabenteile werden nicht bewertet.