# Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 13

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Chris Kowall, Christian Düll

http://www.biostruct.uni-hd.de/PartielleDifferentialgleichungen.php

**Abgabe:** Keine Abgabe. Dieses Blatt wird nicht bewertet

### Aufgabe 13.1

Nennen Sie jeweils eine elliptische, eine parabolische und eine hyperbolische Gleichung zweiter Ordnung. Begründen Sie, warum diese Gleichungen vom jeweiligen Typ sind.

### Aufgabe 13.2

Sei $b \in \mathbb{R}^3$, $f \in C^1(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ und $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Benennen Sie das Problem

$$\begin{cases} u_t(\boldsymbol{x},t) + b \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} u(x,t) = f(\boldsymbol{x};t), & \text{für alle } (\boldsymbol{x},t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u(\boldsymbol{x},0) = g(\boldsymbol{x}) & \text{für alle } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1}$$

und geben Sie eine Lösungsdarstellung von $u$ an. Lösen Sie das Problem mit den Daten

$$b = (1,0,-1)^{\intercal}, \qquad f(x,y,z;t) = \sin(xy^2 + t), \qquad g(x,y,z) = e^{z^3}. \tag{2}$$

### Aufgabe 13.3

Lösen Sie folgendes System mithilfe der Methode der Charakteristiken:

$$\begin{cases} u_x(x,y) + u_y(x,y) = u(x,y)^2 & \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) = e^x & \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

### Aufgabe 13.4

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Für $u, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ sei

$$(Lu, \varphi) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_i u \partial_j \varphi + c(x) u \varphi \, \mathrm{d}x$$

für gleichmäßig elliptisches $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ sowie $c \in L^\infty(\Omega)$ mit $c \geq 0$.

(a) Zeigen Sie durch Testen mit $u^+ := \max(u,0) \in W_0^{1,2}(\Omega)$, dass

$$(Lu, \varphi) \leq 0 \qquad \forall\, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega), \varphi \geq 0 \text{ f.ü. in } \Omega$$

bereits $u \leq 0$ f.ü. in $\Omega$ impliziert.

(b) Formulieren und beweisen Sie ein entsprechendes Minimumsprinzip. Folgern Sie die Eindeutigkeit schwacher Lösungen des zugehörigen Dirichlet-Problems

$$Lu = f \in L^2(\Omega).$$

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 13.5**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und $f \in L^2(\Omega)$. Wir betrachten das folgende Problem

$$\begin{cases} -\Delta u + \omega \cdot \nabla u = f, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

mit einer Funktion $\omega \in L^\infty(\Omega)^2 \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, die $\nabla \cdot \omega = 0$ erfüllt.

(a) Leiten Sie die schwache Formulierung für Funktionen aus $W_0^{1,2}(\Omega)$ her.

(b) Zeigen Sie, dass die schwache Formulierung eine eindeutige Lösung besitzt.

*Hinweis*: Verwenden Sie ohne Beweis die Identität

$$(\omega \cdot \nabla u, u)_{L^2(\Omega)} = -\frac{1}{2}(\nabla \cdot \omega, u^2)_{L^2(\Omega)} \qquad u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

**Aufgabe 13.6**
Sei $\Phi$ die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^{n+1}$ und $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$ mit $g(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$. Zeigen Sie, dass die Funktion $u(\cdot, t) := \Phi(\cdot, t) * g$ nach unendlicher Zeit verschwindet, das heißt

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

**Aufgabe 13.7**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $C^1$-Rand, und $T > 0$. Sei $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$|\nabla_x u(x,t)|^2 - \Delta_x u(x,t) + \partial_t u(x,t) = 0 \qquad \text{für alle } (x,t) \in \Omega_T, \tag{3}$$

wobei $\Omega_T$ den parabolischen Zylinder bezeichnet. Zeigen Sie

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u,$$

wobei $\Gamma_T$ den parabolischen Rand bezeichnet.

**Aufgabe 13.8**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $C^1$-Rand, und $T > 0$. Sei $u \in C^2(\overline{\Omega_T})$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung mit $u = 0$ auf $\partial\Omega \times (0,T)$. Zeigen Sie, dass die Energie

$$\mathbb{E}(t) := \int_\Omega u_t(x,t)^2 + |\nabla u(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x$$

konstant ist.

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 13.9**
Sei $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$, $T > 0$. Betrachten Sie die homogene Wellengleichung mit Dirichlet 0-Randbedingung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in} \quad \Omega_T, \\ u(\cdot, 0) = g & \text{in} \quad \Omega, \\ u_t(\cdot, 0) = h & \text{in} \quad \Omega \end{cases} \tag{4}$$

für Funktionen $g \in W_0^{1,2}(\Omega), h \in L^2(\Omega)$.

(a) Geben Sie die schwache Formulierung von (4) an.

(b) Die Eigenwerte des Laplace Operators $-\Delta$ sind auf $\Omega$ durch $\lambda_k = (k\pi)^2$ gegeben mit den zugehörigen Eigenfunktionen $\omega_k(x) = \sin(k\pi x)$, $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega \nabla\omega_k \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \lambda_k \int_\Omega \omega_k v \,\mathrm{d}x \qquad \forall\, v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Bestimmen Sie mithilfe der Galerkin Approximation aus der Vorlesung die schwache Lösung des Problems; d.h wir starten mit einer endlich dimensionalen Approximation

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t)\omega_k(x), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie explizit die Faktoren $d_m^k(t)$ in obiger Situation, wobei Sie ohne Beweis die Fourierreihen von $g, h$ verwenden dürfen.