Partielle Differentialgleichungen - Übungsblatt 11

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Chris Kowall

http://www.biostruct.uni-hd.de/PartielleDifferentialgleichungen.php

Abgabe: 22. Januar, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 11.1 4 Punkte

Seien $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f \in C(\mathbb{R})$ monoton fallend sowie ungerade, d.h. $f(-u) = -f(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}$, mit einziger Nullstelle bei $u = 0$ gegeben. Zeigen Sie

$$\max_{\overline{\Omega_T}} |u| = \max_{\Gamma_T} |u|$$

für eine Lösung $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ der semilinearen Gleichung

$$\partial_t u - \Delta u = f(u) \qquad \text{in} \quad \Omega_T.$$

Aufgabe 11.2 4 Punkte

Sei $\alpha > 1$ und $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$g(t) := \begin{cases} \exp(-t^{-\alpha}), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

(a)* Zeigen Sie unter Verwendung der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel die Abschätzung

$$|g^{(k)}(t)| \leq \frac{k!}{(\theta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2} t^{-\alpha}\right)$$

für die k-te Ableitung von g, indem Sie über den Kreisrand $\partial B_{\theta t}(t) \subset \mathbb{C}$ für ein zu wählendes $\theta = \theta(\alpha) \in (0,1)$ integrieren.

(b) Beweisen Sie, dass die Funktion $u : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u(x,t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}$$

eine von 0 verschiedene klassische Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung auf ganz $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ ist. Sie können ohne Beweis die Abschätzung $(k!)^2 \leq (2k)!$ für $k \in \mathbb{N}_0$ verwenden.

Aufgabe 11.3 4 Punkte

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $T > 0$ sowie $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times (0,T)$$

mit Anfangsbedingung $u(\cdot, 0) = 0$ in $\mathbb{R}^n$ sowie der Wachstumsschranke

$$|u(x,t)| \leq C \exp(a|x|^2) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T]$$

für Konstanten $a, C > 0$.

Bitte wenden!

Zeigen Sie $u \equiv 0$, indem Sie folgende Aufgaben bearbeiten:

(a) Sei zunächst $4aT < 1$, d.h. es gibt ein $\delta > 0$ mit $4a(T + \delta) < 1$, und definieren Sie die Hilfsfunktion

$$u_\varepsilon(x,t) := u(x,t) - \varepsilon\Psi(x,t;y)$$

wobei $y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ gegeben seien und Ψ gegeben ist durch

$$\Psi(x,t;y) := \frac{1}{[4\pi(T+\delta-t)]^{n/2}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\delta-t)}\right).$$

Wenden Sie das Maximumprinzip für u_ε auf

$$\Omega_T := B_r(y) \times (0,T)$$

für ein hinreichend groß zu wählenden Radius $r > 0$ an und folgern Sie $u_\varepsilon \leq 0$ bzw. $u \leq 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,T)$.

(b) Folgern Sie aus (a) eine analoge Abschätzung der Lösung u nach unten. Machen Sie sich klar, dass die Annahme $4aT < 1$ sukzessive aufgehoben werden kann und die Lösung auf ganz $[0,T]$ bereits identisch Null ist.