Universität Heidelberg Sommersemester 2013

Wiederholungsblatt

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Physiker II

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra
Dipl. Math. Alexandra Köthe

Fragen

Machen Sie sich bei ihren Antworten genau klar, unter welchen Voraussetzungen eine Aussage gilt!! Achten Sie darauf, von wo nach wo eine Abbildung definiert sein muss, damit ein Begriff definiert werden kann.

1. Wie funktioniert das Prinzip der vollständigen Induktion?
2. Welche Struktur haben die reellen Zahlen?
3. Welche Struktur hat der $\mathbb{R}^n$?
4. Sei V ein Vektorraum. Bringen Sie die folgenden Eigenschaften in die richtige Reihenfolge: (d. h. welche Eigenschaft impliziert eine andere und warum?)
   - V ist ein metrischer Raum.
   - V besitzt ein Skalarprodukt.
   - V ist ein normierter Raum.
5. Wie lautet die Ungleichung von Cauchy-Schwarz?
6. Wie lautet die Bernoulli-Ungleichung?
7. Wie sind $\min, \max, \sup$ und $\inf$ einer Menge definiert?
8. Was ist eine Folge? Was eine Teilfolge? Wann heißt eine Folge monoton, wann beschränkt?
9. Was ist ein Grenzwert einer Folge? Was ein Häufungswert? Wie sind $\limsup$ und $\liminf$ einer Folge definiert?
10. Warum ist ein Grenzwert eindeutig? Konvergieren Teilfolgen konvergenter Folgen?
11. Was ist die Definition einer Cauchyfolge?
12. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Bringen Sie die folgenden Eigenschaften in die richtige Reihenfolge:
    - $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.
    - $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.
    - $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine beschränkte Folge.
    - $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine konvergente Folge.

    Gibt es Bedingungen an M, unter denen gewisse Eigenschaften gleich sind?
13. Nennen Sie metrische Räume, die nicht vollständig sind.
14. Wie kann man den Grenzwert einer rekursiv definierten Folge berechnen? Welcher Satz kann dazu verwendet werden?
15. Was ist eine Reihe? Nennen Sie wichtige konvergente und divergente Reihen.
16. Nennen Sie verschiedene Konvergenzkriterien für Reihen.
17. Wann heißt eine Reihe absolut konvergent? Nennen Sie eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe.
18. Kann man Reihen umordnen?

19. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $N \subset M$ eine Teilmenge. Wann heißt N offen, wann abgeschlossen, wann beschränkt? Wann heißt N folgenkompakt?
20. Wie sind folgenkompakte Mengen im $\mathbb{R}^n$ charakterisiert?
21. Wie ist ein Grenzwert $\lim_{x \to a} f(a)$ definiert?
22. Wann heißt eine Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen stetig? Nennen Sie beide Definitionen!
23. Sei $f : ([a, b], |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ eine Abbildung. Bringen Sie die folgenden Begriffe in die richtige Reihenfolge:
    - f ist Lipschitz-stetig.
    - f ist stetig.
    - f ist kontraktiv.
    - f ist gleichmäßig stetig.
24. Sind lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen stetig?
25. Sei f_n eine Folge von Funktionen, die gegen eine Grenzfunktion f konvergiert. Wann heißt diese Konvergenz punktweise und wann gleichmäßig? Unter welchen Voraussetzungen kann ich aus Eigenschaften von f_n Schlüsse auf Eigenschaften von f ziehen?
26. Wie ist ein Grenzwert $\lim_{x \to a} f(a)$ definiert?
27. Was besagt der Zwischenwertsatz?
28. Was kann man über stetige Abbildungen auf einer folgenkompakten Menge aussagen?
29. Wann heißt eine Abbildung differenzierbar?
30. Was ist der Differenzenquotient? Was der Differenzialquotient? Warum kann man darüber nur die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren?
31. Welche Regeln zur Berechnung von Ableitungen gibt es?
32. Sei f bijektiv. Wie berechnet man die Ableitung der Umkehrfunktion?
33. Was sind der Gradient, die Jacobimatrix und die Hessematrix?
34. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Bringen Sie die folgenden Eigenschaften in die richtige Reihenfolge:
    - f ist differenzierbar.
    - f ist partiell differenzierbar.
    - f ist stetig partiell differenzierbar.
    - f ist besitzt alle Richtungsableitungen.
35. Was besagt der Mittelwertsatz? Was der Satz von Rolle?
36. Wann heißt eine Funktion konvex (konkav)? Gibt es Kriterien um zu entscheiden, ob eine Funktion konvex (konkav) ist? Nennen Sie eine konvexe und eine konkave Funktion.
37. Nennen Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Minima und Maxima.
38. Was ist eine Potenzreihe? Wie kann man bestimmen, in welchem Bereich eine Potenzreihe konvergiert?
39. Was ist ein Taylorpolynom? Was ist eine Taylorreihe? Wann wird eine Funktion durch ihre Taylorreihe dargestellt?
40. Was besagt die Regel von L'Hospital?
41. Wie sind die Funktionen $\exp, \sin, \cos$ und $\log$ definiert? Was ist ihre Reihenentwicklung? Wie hängen sie zusammen? Welche Eigenschaften haben sie?

Übungsaufgaben

Vollständige Induktion

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass gilt:

a) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{R}, q \neq 1$.

b) $2n \prod_{k=2}^{n} (1 - k^{-2})^k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Grenzwerte von Folgen und Reihen

Aufgabe 2

Welche der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \frac{2n^2-5}{5n^2-n+2}$

b) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

c) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

d) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit nicht negativen Gliedern $a_n \in \mathbb{R}$ auch die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ konvergent sind.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$,

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right)^k$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$

Aufgabe 5

Wir betrachten für $a \in \mathbb{R}^+$ die rekursiv definierte Folge $a_0 = 0, a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$.

a) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton wachsend ist.

b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ dieser Folge.

c) Wie kann ohne Verwendung von a) die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gezeigt werden?

Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit von Abbildungen

Aufgabe 6

Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x\to\infty} x^{-n} \exp(x)$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$.

b) $\lim_{x\to\infty} x^n \log(x)$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$.

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$.

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x^2}$.

e) $\lim_{x\to\infty} x\big((1+x^{-1})^x - e\big)$. (Hinweis: Verwenden Sie zunächst die Transformation $y := x^{-1}$)

Aufgabe 7

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ auf $(0,\infty)$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sqrt{|1-x|}$ auf $[0,2]$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 8

Für welche $x \in \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Funktionen definiert und stetig:

a) $\log(\log(||x||_2))$

b) $f(x) := \begin{cases} ||x||_2 & ||x||_2 \le 1 \\ 1 & ||x||_2 > 1 \end{cases}$

Aufgabe 9

Sei $f : \mathbb{R}^2 \backslash (0,0) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$. Warum ist f stetig, aber nicht gleichmäßig stetig?

Aufgabe 10

Die Funktion $f(x)$ sei für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, stetig in $x = 0$ und erfülle für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)f(y)$. Beweisen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

Differenzierbarkeit von Funktionen, Minima und Maxima

Aufgabe 11

Wir betrachten für ein festes $k \in \mathbb{N}$ die durch

$$f_k(x) := \begin{cases} x^k \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

definierte Funktion $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für $x \neq 0$ sind alle f_k beliebig oft differenzierbar.

a) Zeigen Sie, dass f_1 in $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass f_2 in $x = 0$ differenzierbar ist, aber die Ableitung nicht stetig ist.

c) Ist f_3 in $x = 0$ zweimal differenzierbar und ist diese Ableitung gegebenenfalls stetig?

Aufgabe 12

Bestimmen Sie die Extrema der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

a) $f(x) = x^x$,

b) $f(x) = x^{1/x}$

Aufgabe 13

Wie lautet die Jacobimatrix der Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (\exp(x)\cos(y), \exp(x)\sin(y))$?

Aufgabe 14

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f_i : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in I und $f_i(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\log(f_1 \cdot ... \cdot f_n) = \frac{f_1'}{f_1} + \cdots + \frac{f_n'}{f_n}.$$

Aufgabe 15

Berechnen Sie Gradienten und Hesse-Matrix der Funktion $f : \overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\} \to \mathbb{R}$, die durch durch $f(x) = ||x||_2^3 - 1$ gegeben ist. Wo liegen Minima und Maxima von f?

Aufgabe 16

Berechnen Sie die kritischen Punkte der Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 - y^3$ und entscheiden Sie, ob es sich um ein Extremum handelt.

Aufgabe 17

Wir haben einen Satz von n Messungen (x_i, y_i). Wir suchen eine Gerade $y = ax + b$, die diese Messpunkte am besten approximiert. Dafür verwenden wir die Methode der kleinsten Quadrate und suchen das Minimum der Funktion

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big)^2.$$

Berechnen Sie das Minimum von F. Drücken Sie es mithilfe von den Mittelwerten $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$, und der Kovarianz $\mathrm{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i$ aus.

Konvergenz von Funktionenfolgen, Taylorentwicklung

Aufgabe 18

Wir betrachten die folgenden Potenzreihen:

a) $\sum_{k=1}^\infty 4^k x^{2k}$,

b) $\sum_{k=1}^\infty \frac{x^k}{\sqrt{k}}$,

c) $\sum_{k=1}^\infty \frac{(-x)^k}{k!}$.

Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der Potenzreihen, d. h. wir suchen $\rho \in [0, \infty]$, sodass die Reihen für alle x mit $|x| < \rho$ konvergieren und für alle x mit $|x| > \rho$ divergieren. Ist die Konvergenz innerhalb des Konvergenzradius gleichmäßig?

Aufgabe 19

Bestimmen Sie die Taylorreihe um $x = 0$ der für $x \neq -1$ definierten Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Wie groß ist der Konvergenzbereich und stellt sie dort die Funktion f dar?

Aufgabe 20

Bestimmen Sie die Taylorreihe um $x = 0$ der Funktion $f(x) = \sin^2(x)$. Wie groß ist der Konvergenzbereich und stellt sie dort die Funktion f dar?