Universität Heidelberg | Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 9 | 14. Juni 2013

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Physiker II

PROF. DR. ANNA MARCINIAK-CZOCHRA

DIPL. MATH. ALEXANDRA KÖTHE

Abgabetermin: 21. Juni 2013, 11:14 Uhr, im Foyer des Instituts für Reine Mathematik (INF 288).

Bemerkung: Wir betrachten $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ mit der Standardmetrik versehen.

AUFGABE 1

a) Wir definieren die Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^\alpha$. Für welche $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ ist f stetig in $x = 0$, für welche $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ ist f sogar Lipschitz-stetig in $x = 0$.

b) Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ gegeben. Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) := \begin{cases} x^m y \exp(-\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{für} \quad x < 0, y \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{für} \quad x = 0, y \in \mathbb{R} \\ x^n y^2 \exp(-\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{für} \quad x > 0, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Für welche $m, n \in \mathbb{Z}$ ist f überall stetig? (Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\lim_{x\to\infty} \exp(-x) = 0$ mithilfe der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, sowie $\lim_{x\to\infty} x^n \exp(-x) = 0$ für $n \geq 0$ mithilfe der Reihendarstellung der Exponentialfunktion.)

4 Punkte

AUFGABE 2

a) Die durch

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{für} \quad x < -2 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ x - 2 & \text{für} \quad x > 2, \end{cases}$$

definierte Funktion $f : D_f := \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2\} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv, so dass ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to D_f$ existiert. Zeigen Sie, dass f stetig ist, aber f^{-1} nicht.

b) Zeigen Sie, dass die Logarithmusfunktion $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \log(x)$, für alle $a > 0$ gleichmäßig stetig ist, die Funktion $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \log(x)$ aber nicht.

4 Punkte

AUFGABE 3

Verwenden Sie den Zwischenwertsatz!

a) Zeigen Sie, dass das reelle Polynom

$$p(x) = x^6 + x^2 + 4x - 5$$

im Intervall $I = [-1, 1]$ mindestens eine Nullstelle hat.

b) Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x) := 1 - \sqrt{\frac{\exp(x^2) - 1}{e - x}}$$

definierte reelle Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ mindestens einen Fixpunkt hat. (Hinweis: Beachten Sie, dass die Wurzelfunktion als Umkehrung der Quadratfunktion monoton ist.)

4 Punkte

BITTE WENDEN!

Aufgabe 4

a) Untersuchen Sie, ob die durch

$$f_n(x) := |\cos^n(x)|, \quad n \in \mathbb{N},$$

auf dem Intervall $I := [0, \pi]$ definierte Folge von reellen Funktionen auf I punktweise konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzfunktion. Zeigen Sie dadür zunächst, dass $|\cos(x)| \leq 1$ gilt. Ist diese Konvergenz gleichmäßig?

b) Wie lautet das Ergebnis bei der Betrachtung der Funktionenfolge auf dem kleineren Intervall $J = [\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi] \subset I$?

4 Punkte