Universität Heidelberg | Sommersemester 2013
Aufgabenblatt 8 | 7. Juni 2013

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Physiker II

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra
Dipl. Math. Alexandra Köthe

Abgabetermin: 14. Juni 2013, 11:14 Uhr, im Foyer des Instituts für Reine Mathematik (INF 288).

Bemerkung: Wir betrachten $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ mit der Standardmetrik versehen.

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie mithilfe der Reihendarstellung des Cosinus, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt: $|\cos(x) - 1| \leq (e-1) \cdot |x|^2$.

b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$.

4 Punkte

Aufgabe 2

Wir betrachten Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} - 12 & \text{für } x \neq 2 \\ 0 & \text{für } x = 2 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^3+8}{x-2} - 12 & \text{für } x \neq 2 \\ 0 & \text{für } x = 2. \end{cases}$$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass f und g stetige Funktionen sind.

4 Punkte

Aufgabe 3

a) Sei $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Zeigen Sie, dass gilt: Wenn U in (Y, d_Y) offen ist, dann ist $f^{-1}(U)$ in (X, d_X) offen.

b) Eine Abbildung $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ heißt offen, wenn gilt: Ist U in (X, d_X) offen, dann ist $f(U)$ offen in (Y, d_Y). Zeigen Sie oder widerlegen Sie:

- Wenn f offen ist, dann ist f stetig.
- Ist f bijektiv, dann gilt: f ist offen genau dann, wenn f^{-1} stetig ist.

4 Punkte

Aufgabe 4

Wir definieren für $x \in \mathbb{C}$ den hyperbolischen Sinus und Cosinus durch

$$\sinh(x) = \frac{1}{i}\sin(ix) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)),$$
$$\cosh(x) = \cos(ix) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)).$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen sinh und cosh für alle $x \in \mathbb{C}$ stetig sind.

b) Stellen Sie $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ durch Reihen dar.

c) Zeigen Sie für alle $x, y \in \mathbb{C}$: $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$.

d) Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{C} : \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$.

4 Punkte