Universität Heidelberg | Sommersemester 2013
Aufgabenblatt 6 | 24. Mai 2013

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Physiker II

PROF. DR. ANNA MARCINIAK-CZOCHRA
DIPL. MATH. ALEXANDRA KÖTHE

Abgabetermin: 31. Mai 2013, 11:14 Uhr, im Foyer des Instituts für Reine Mathematik (INF 288).

Bemerkung: Sofern nicht anders angegeben, betrachten wir ab sofort $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^n$ immer mit der Standardmetrik versehen.

AUFGABE 1

Eine Anlage produziert radioaktive Abfälle. Die Abfälle werden in einem Becken gesammelt, wo sie durch radioaktive Prozesse weiter zerfallen. Jeden Abend werde dem Becken die Menge m an radioaktiven Abfällen hinzugefügt. Die Menge an Abfällen, die am Tag n vorhanden ist (nach hinzufügen der täglichen Dosis) werde mit M_n bezeichnet. Nach einem Tag ist von der Menge M_n nur noch ein Rest $\alpha \cdot M_n,\ \alpha \in (0,1)$ vorhanden.

Wir beschreiben den Sachverhalt durch folgendes Modell: Am Tag 0 werde die Anlage in Betrieb genommen, am Abend des Tages Null werden erstmals Abfälle in das Becken entleert. Die abendliche Abfallmenge wird dann beschrieben durch:

$$\begin{cases} M_{n+1} = M_n \cdot \alpha + m \\ M_0 = m \end{cases} \tag{1}$$

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Reihe mit den Partialsummen $M_n = m\sum_{i=0}^{n} \alpha^i$ ist.

b) Zeigen Sie unter Verwendung des Ergebnisses aus a) durch Abschätzung des Quotienten M_{n+1}/M_n, dass die Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wächst.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes den Grenzwert M_∞ der Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Zeigen Sie, dass Ihre unter a) angegebene Reihe folgende Beziehung erfüllt: $M_n - M_k = \alpha^{k+1} M_{n-k-1}$, für $n > k > 0$. Berechnen Sie damit den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} M_n - M_k = M_\infty - M_k$.

e) Geben Sie basierend auf d) eine geschlossene Formel für M_n, $n > 0$ an. Am Abend welchen Tages befindet sich die Abfallmenge erstmals in der ϵ-Umgebung von M_∞, wenn sie $\epsilon = 0,1 \cdot M_\infty$ setzen?

7 Punkte

AUFGABE 2

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit dem Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass auch die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$y_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$$

in $\mathbb{R}$ konvergiert mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} y_n = x$.

b) Man finde eine in $\mathbb{R}$ divergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für welche $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in a) definiert konvergiert.

3 Punkte

BITTE WENDEN!

Aufgabe 3

In der Vorlesung haben Sie das Newton-Verfahren kennengelernt. Für die Gleichung $x^2 = a$ lautet die Newton-Iteration

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Im Folgenden sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ fest. Wir definieren:

$$F_a(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

In der Vorlesung wurde bewiesen:

$$(x_0 > 0 \text{ und } x_0^2 \geq a) \Rightarrow (x_n^2 \geq a \text{ und } x_n \geq x_{n+1})$$

a) Sei $x_0 > 0$ mit $x_0^2 \geq a$ beliebig. Zeigen Sie:
   (i) Für alle $x \in [\sqrt{a},\ x_0]$ ist $F_a(x) \in [\sqrt{a},\ x_0]$, das heißt $F_a([\sqrt{a},\ x_0]) \subset [\sqrt{a},\ x_0]$.
   (ii) $F:\ [\sqrt{a},\ x_0] \to [\sqrt{a},\ x_0]$ ist eine strenge Kontraktion.

b) Geben Sie ein Beispiel für $x_0 \in [0.01,\ \sqrt{a}]$ um zu zeigen, dass $F_a:\ \mathbb{R}^+ \setminus (0, 0.01) \to \mathbb{R}^+ \setminus (0, 0.01)$ keine strenge Kontraktion ist.

c) Kann man aus b) folgern, dass die Newton-Iteration mit obigem F_a für Startwerte aus $[0.01,\ \sqrt{a}]$ nicht konvergieren kann?

d) Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Es gilt: $\sqrt{a}$ ist Fixpunkt von $G_a:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G_a(x) = a/x$. Ist G_a zur iterativen Bestimmung von $\sqrt{a}$, das heißt durch eine Folge $x_0 > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = G_a(x_n)$, geeignet?

6 Punkte