Universität Heidelberg — Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 5 — 17. Mai 2013

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Physiker II

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra

Dipl. Math. Alexandra Köthe

Abgabetermin: 24. Mai 2013, 11:14 Uhr, im Foyer des Instituts für Reine Mathematik (INF 288).

Aufgabe 1

Prüfen Sie, ob es sich bei den Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um Cauchyfolgen handelt.

(a) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \in \mathbb{Q}$

(b) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2+a_n}{1+a_n} \in \mathbb{Q}$

4 Punkte

Aufgabe 2

Prüfen Sie die Konvergenz der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in den reellen Zahlen und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$

(b) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$

4 Punkte

Aufgabe 3

Zeigen Sie die Konvergenz (bzw. Divergenz) der Folgen reeller, bzw. komplexer Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) $a_n = \frac{1+i^n}{n} \in \mathbb{C}$ (hier ist i die imaginäre Einheit)

(b) $a_n = \sqrt{n} \in \mathbb{R}$

(c) $a_n = \frac{n^2+2}{n^2-\pi} \in \mathbb{R}$

(d) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} \in \mathbb{R}$

4 Punkte

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \in \mathbb{R}$ eine Nullfolge ist. Benutzen Sie dazu die Zwischenschritte:

1. für alle $n > k$ $(n, k \in \mathbb{N})$ gilt: $n! > k!k^{n-k}$,
2. für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n < \frac{2}{k}$, wobei k geeignet gewählt werden muss.

4 Punkte