Universität Heidelberg — Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 4 — 10. Mai 2013

Übungen zur Vorlesung

# Höhere Mathematik für Physiker II

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra
Dipl. Math. Alexandra Köthe

Abgabetermin: 17. Mai 2013, 11:14 Uhr, im Foyer des Instituts für Reine Mathematik (INF 288).

---

## Aufgabe 1

Sei $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren die Normen

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad \|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}^n$ die folgenden Ungleichungen:

(a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$

(b) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$

*4 Punkte*

## Aufgabe 2

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist durch $\|x\|_2$ (Aufgabe 1) die Standardnorm und durch $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}$ das Standardskalarprodukt definiert. Zeigen Sie folgende Identitäten:

(a) $\|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\langle x, y\rangle$

(b) $\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 = 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2)$

(c) $\|x + y\|_2^2 - \|x - y\|_2^2 = 4\langle x, y\rangle$

(d) Geben Sie jeweils eine geometrische Interpretation an.

*4 Punkte*

## Aufgabe 3

Es sei $(M, d)$ ein metrischer Raum.

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $M$. Zeigen Sie, dass dann auch jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(b) Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $M$. Zeigen Sie, dass dann auch jede Teilfolge von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und denselben Grenzwert hat.

(c) Es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ bezüglich der Metrik $d(x, y) = |y - x|$, und es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $x \neq 0$ in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $y_n x_n^{-1}$ für fast alle $n$ (das heißt alle bis auf endlich viele) definiert ist und dass die resultierende Teilfolge eine Cauchy-Folge ist.

*4 Punkte*

BITTE WENDEN!

Aufgabe 4

Entscheiden Sie in den folgenden Fällen, ob es sich um metrische Räume handelt:

(a) $(M, d)$, wobei $M$ eine beliebige Menge ist und $d(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$.

(b) $(\mathbb{R}^2, d)$ mit $d(x, y) := |x_1 - y_1|$, wobei $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$.

(c) $(\mathbb{Z}, d_p)$, wobei $p$ eine Primzahl ist und

$$d_p(x, y) := \begin{cases} p^{-\nu} & \text{mit } \nu := \max\{n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } p^{-n}(x - y) \in \mathbb{Z}\} \text{ falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

(d) $(\mathbb{R}, d)$ mit $d(x, y) := |x^2 - y^2|$.

*4 Punkte*