Universität Heidelberg | Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 3 | 3. Mai 2013

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Physiker II

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra
Dipl. Math. Alexandra Köthe

Abgabetermin: 10. Mai 2013, 11:14 Uhr, im Foyer des Instituts für Reine Mathematik (INF 288).

Aufgabe 1

1. Zeigen Sie mithilfe des Vollständigkeitsaxioms von Archimedes folgende Aussage:
   Zu je zwei reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$.
2. Zeigen Sie, dass es zu jeder reellen Zahl $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n > 0$ gibt, so dass $\frac{1}{n} < \epsilon$ gilt.
3. Sei $b > 1$ eine reelle Zahl. Dann gibt es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass gilt $b^n > K$.

4 Punkte

Aufgabe 2

Zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, so dass $n \leq x < n + 1$ gilt. Wir definieren $\lfloor x \rfloor = n$.

Zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$, so dass $m - 1 < x \leq m$ gilt. Wir definieren $\lceil x \rceil = m$.

Zeigen Sie folgende Rechenregeln:

1. $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$ für alle $x \in \mathbb{R}$
2. $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ für $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$
3. $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+k-1}{k} \right\rfloor$ für alle $n, k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq 1$.

4 Punkte

Aufgabe 3

1. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen für alle reellen Zahlen x, y gelten:
$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |y - x|}{2} \quad \text{und} \quad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |y - x|}{2}$$
2. Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung
$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$
3. Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n > 3$ die Aussage $2^n < n!$ gilt.
4. Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Aussage $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$ gilt.

4 Punkte

BITTE WENDEN!

Aufgabe 4

Seien A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$, dann definieren wir

$-A = \{-a \mid a \in A\}$,

$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$,

$A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$.

Zeigen Sie oder widerlegen Sie für $A, B \neq \emptyset$ folgende Aussagen:

1. $\sup(-A) = -\inf A$
2. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
3. $\inf(A \cdot B) = (\inf A) \cdot (\inf B)$

4 Punkte