Universität Heidelberg — Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 2 — 26. April 2013

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Physiker II

PROF. DR. ANNA MARCINIAK-CZOCHRA
DIPL. MATH. ALEXANDRA KÖTHE

Abgabetermin: 3. Mai 2013, 11:14 Uhr, im Foyer des Instituts für Reine Mathematik (INF 288).

AUFGABE 1

Seien A, B, C, D Mengen. Zeigen Sie folgende Rechenregeln für das kartesische Produkt von Mengen:

a) $A \times B = \emptyset \quad \Leftrightarrow A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$

b) $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$

c) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$

4 Punkte

AUFGABE 2

1. Sei M eine Menge und $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Zeigen Sie, dass es keine Bijektion $f : M \to \mathcal{P}(M)$ geben kann.
2. Bestimmen Sie, sofern vorhanden, Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der folgenden Mengen:

   a) $M_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < \pi\}$

   b) $M_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x^2 < 5\}$

   c) $M_3 = \{x \in \mathbb{Q} \mid 8 \leq x^3 < 9\}$

   d) $M_4 = \emptyset$

4 Punkte

AUFGABE 3

Ein Körper K heißt geordnet, wenn er eine totale Ordnungsrelation „$\leq$ “besitzt, die mit der Addition und Multiplikation verträglich ist, das heißt für alle $a, b, c \in K$ gilt:

- aus $a \leq b$ folgt $a + c \leq b + c$ und
- aus $0 \leq a$ und $0 \leq b$ folgt $0 \leq a \cdot b$.

Sei K ein geordneter Körper und $a, b \in K$. Zeigen Sie:

a) Es ist $a^2 \geq 0$.

b) Es gilt $a^2 + b^2 \geq 0$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $a = b = 0$.

c) Seien $a, b > 0$. Wenn $a < b$, dann gilt $a^2 < b^2$.

4 Punkte

AUFGABE 4

Sei $(K, \leq)$ ein geordneter Körper.

a) Seien $x, y \in K$. Falls $x < y + \epsilon$ für jedes $\epsilon \in K$ mit $\epsilon > 0$, dann gilt $x \leq y$.

b) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in K$ mit $x \geq -1$ die Ungleichung

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

(Wir vereinbaren $0^0 = 1$.)

4 Punkte