Universität Heidelberg — Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 1 — 19. April 2013

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Physiker II

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra
Dipl. Math. Alexandra Köthe

Abgabetermin: 26. April 2013, 11:14 Uhr, im Foyer des Instituts für Reine Mathematik (INF 288).

Aufgabe 1

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion

1. die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 1, n \in \mathbb{N},$$

2. die Summenformel für die ersten n ungeraden Zahlen

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

4 Punkte

Aufgabe 2

Der Binomialkoeffizient ist für natürliche Zahlen $n, k \in \mathbb{N}_{\geq 0}, k \neq n$ durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

definiert. Zeigen Sie, dass für alle $1 \leq k \leq n+1$ die Formel

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

gilt.

Beweisen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ mittels vollständiger Induktion die allgemeine binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

4 Punkte

Aufgabe 3

Beweisen Sie durch Widerspruch, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Sie dürfen dabei den Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung verwenden. *4 Punkte*

Aufgabe 4

Seien A, B Mengen und bezeichne $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A. Ist die folgenden Aussage über Potenzmengen wahr oder falsch?

$$\forall A \forall B : \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$$

Beweisen Sie die Aussage oder nennen Sie ein Gegenbeispiel. *4 Punkte*