Universität Heidelberg Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 11 28. Juni 2013

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Physiker II

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra

Dipl. Math. Alexandra Köthe

Abgabetermin: 5. Juli 2013, 11:14 Uhr, im Foyer des Instituts für Reine Mathematik (INF 288).

Bemerkung: Wir betrachten $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik versehen.

Aufgabe 1

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f(x) = x^n \exp(-x)$ ein striktes globales Maximum im Punkt $x = n$ hat.

b) In einem Halbkreis vom Radius R ist ein einbeschriebenes Trapez mit maximalem Inhalt zu konstruieren. Die Länge der unteren Seite ist $2R$. Bestimmen Sie die Länge der oberen Seite $2x$.

4 Punkte

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die punktweisen Grenzfunktionen der Funktionenfolgen

a) $f_n(x) := \sin(\frac{1}{n}x)$, für $x \in [-\pi, \pi]$,

b) $f_n(x) := nx(1-x)^n$, für $x \in [0,1]$.

Ist die Konvergenz gleichmäßig? (Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz!) *4 Punkte*

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und deren Determinante der Abbildung

$$\begin{aligned} f : [0,\infty) \times [0,2\pi) \times [0,\pi) &\to \mathbb{R}^3 \\ (r,\phi,\theta) &\mapsto (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta) \end{aligned}$$

Interpretieren Sie f geometrisch. *2 Punkte*

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ bijektiv ist. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

b) Zeigen Sie, dass $\sin(4x) = 4\frac{\tan(x)(1-\tan^2(x))}{(1+\tan^2(x))^2}$ gilt. (Hinweis: Verwenden Sie die Additionstheoreme für Sinus (Blatt 10, Aufgabe 1) und Cosinus $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$)

c) Rechnen Sie nach, dass für $0 \leq v < 1$ die Funktion

$$u(t,x) := 4\arctan\left(\exp\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right)$$

die nichtlineare Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \sin(u) = 0$$

löst.

6 Punkte