Universität Heidelberg — Sommersemester 2013
Aufgabenblatt 10 — 21. Juni 2013

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Physiker II

PROF. DR. ANNA MARCINIAK-CZOCHRA
DIPL. MATH. ALEXANDRA KÖTHE

Abgabetermin: 28. Juni 2013, 11:14 Uhr, im Foyer des Instituts für Reine Mathematik (INF 288).

Bemerkung: Wir betrachten $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik versehen.

AUFGABE 1

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann in x_0 differenzierbar ist, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.

b) Zeigen Sie, dass für die Exponentialfunktion $\exp'(x) = \exp(x)$ gilt (Hinweis: Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = 1$).

c) Zeigen Sie das Additionstheorem für Sinus

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

und nutzen Sie dies um $\sin'(x) = \cos(x)$ zu zeigen.

4 Punkte

AUFGABE 2

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto |xy|. \end{aligned}$$

Für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist f partiell differenzierbar und für welche differenzierbar? Begründen Sie ihre Antwort.

4 Punkte

AUFGABE 3

Gegeben sei die stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ existieren überall.

(b) f ist nicht differenzierbar in $(x, y) = (0, 0)$. (Hinweis: Zeigen Sie dafür, dass die Grenzwerte $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ und $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ davon abhängen, wie sich (x, y) dem Punkt $(0, 0)$ nähert.

4 Punkte

BITTE WENDEN!

Aufgabe 4

Für $v = (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ definiert man

$$q(v) = t^2 - (x^2 + y^2 + z^2).$$

Mit der Diagonalmatrix $S = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ gilt

$$q(v) = v^T S v.$$

Man definiert die Matrixgruppe $O_{1,3} = \{M \in \mathrm{Mat}_{4,4}(\mathbb{R}) \mid M^T S M = S\}$. ($M^T$ ist die zu M transponierte Matrix.)

Zeigen Sie:

a) Die Menge $K = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid q(v) = 1\}$ zerfällt in zwei abgeschlossene Teilmengen $K_+ = \{v \in K \mid t > 0\}$ und $K_- = \{v \in K \mid t < 0\}$.

b) Die Projektion $K \to \mathbb{R}^3$, $v = (t, x, y, z) \mapsto (x, y, z)$, eingeschränkt auf K_+ oder K_- ist eine stetige Bijektion.

c) Durch $v \mapsto Mv$ für $M \in O_{1,3}$ wird eine stetige Abbildung von K in sich definiert. Gibt es einen Punkt $v \in K_+$ mit $Mv \in K_+$, dann gilt $MK_+ = K_+$. (Hinweis: Verwenden Sie den Zwischenwertsatz.)

4 Punkte