Mathematik für Informatiker 2

Eine Vorlesung von

Dr. Alexandra Köthe
Institut für angewandte Mathematik
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Version vom 2. Oktober 2014

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

1.1. Inhalt der Vorlesung

Die Vorlesung Mathe für Informatiker 2 behandelt die Differenzial- und Integralrechnung einer Veränderlicher und deckt damit die wesentlichen Teile des Stoffs einer Analysis 1 Vorlesung ab.

Wir werden uns zunächst mit den reellen Zahlen beschäftigen und dabei den Begriff der Vollständigkeit kennenlernen, durch den sich $\mathbb{R}$ von den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ unterscheidet. Dafür benötigen wir Folgen von Zahlen, sowie deren Grenzwerte. Wir werden sehen, dass sich jede reelle Zahl beliebig gut durch eine rationale approximieren lässt.

Als nächstes betrachten wir Funktionen auf $\mathbb{R}$, das heißt Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bzw. $f : D \to \mathbb{R}$ wobei $D \subseteq \mathbb{R}$. In der linearen Algebra haben wir bisher nur lineare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = ax$ betrachtet. Hier werden wir uns auch mit *nichtlinearen Funktionen*, wie zum Beispiel $f(x) = \exp(x), \log(x), \sin(x), x^2, x^5, 1/x$, usw. beschäftigen. Insbesondere werden wir verschiedene Eigenschaften solcher Funktionen untersuchen, von denen Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit die wichtigsten sind. Diese werden benötigt um weitere Eigenschaften wie Monotonie, Existenz von Minima/Maxima, usw. zu untersuchen.

Desweiteren werden wir Folgen von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ untersuchen und deren Grenzfunktion $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Dabei werden wir untersuchen, wie gut sich f durch f_n approximieren läßt. Außerdem untersuchen wir, welche Eigenschaften von f_n sich auf f übertragen.

1.2. Warum braucht ein Informatiker Analysis

1.2.1. der konzeptionelle Zusammenhang zwischen den Begriffen diskret und kontinuierlich

1.2.2. Optimierungsprobleme

1.2.3. maschinelles Lernen

1.2.4. Komprimierung

1.2.5. Komplexitätsanalyse

2. Zahlenmengen

Wir wollen in diesem Abschnitt kurz die wichtigsten Erkenntnisse des letzten Semesters über die verschiedenen Zahlenmengen zusammenfassen. Dabei liegt der Schwerpunkt auf Themen, die für das aktuelle Semester relevant sind.

2.1. Die natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ werden über die Peano-Axiome definiert. Diese implizieren das Prinzip der vollständigen Induktion.
$\mathbb{N}$ besitzt als algebraische Verknüpfung eine Addition und eine Multiplikation, bildet aber mit keiner dieser Verknüpfungen eine Gruppe.
Auf den natürlichen Zahlen ist eine Ordnungsrelation durch

$$n \leq m \quad \Leftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{N} \quad \text{sodass} \quad n + c = m$$

definiert.

Definition 2.1.1 Wir definieren das Summenzeichen durch

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n.$$

Dabei sind die Elemente $x_i \in K$, einem Körper.
Für eine Teilmenge $I \subset \mathbb{N}$ ist es ebenfalls möglich das Summenzeichen zu definieren.

$$\sum_{i \in I} x_i$$

summiert nun über alle x_i für die $i \in I$ liegt.
Insbesondere ist die leere Summe durch $\sum_{i \in \emptyset} := 0$ definiert.

Beispiel 2.1.2 Ist $I = \{1, 5, 10, 234\}$, dann ist $\sum_{i \in I} x_i = x_1 + x_5 + x_{10} + x_{234}$.

Ein häufig benutzter Trick in Beweisen ist das "Shiften" von Indizes in Summenformeln. So ist zum Beispiel

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i-1} = x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i.$$

Wenn wir der Laufindex i sowohl bei einer um eins kleineren Zahl anfängt als auch aufhört, dann muss i in der Formel durch $i + 1$ ersetzt werden.

Analog zum Summenzeichen gibt es auch ein Produktzeichen.

Definition 2.1.3 Für Elemente x_i aus einem Körper K, ist das Produktzeichen durch

$$\prod_{i=0}^{n} x_i = x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot x_n$$

definiert. Für $I \subset \mathbb{N}$ wird $\prod_{i \in I}$ als das Produkt aller Elemente x_i deren Index in der Menge I liegt definiert. Insbesondere ist das leere Produkt durch $\prod_{i \in \emptyset} := 1$ definiert.

2.1.1. Kombinatorik

Definition 2.1.4 Sei $n \in \mathbb{N}$, dann definieren wir die **Fakultät** von n durch:

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{für } n > 0 \text{ und } 0! := 1.$$

Definition 2.1.5 Seien $n, k \in \mathbb{N}$, dann definieren den **Binomialkoeffizienten** "n über k" durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)}{k!}$$

für $k \leq n$ und

$$\binom{n}{k} = 0,$$

wenn $k > n$.

Proposition 2.1.6 Die Anzahl der möglichen Anordnungen (*Permutationen*) der Elemente einer n-elementigen Menge M ist durch $n!$ gegeben.

Beweis. Wir beweisen diese Aussage mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang: $n = 1$ - eine einelementige Menge hat nur eine mögliche Anordnung seiner Elemente.
Induktionsannahme: Eine n-elementigen Menge M hat $n!$ mögliche Anordnungen seiner Elemente.
Induktionsschritt: Sei M eine $(n+1)$-elementige Menge. Die Anzahl der möglichen Anordnungen mit dem Element $k \in M$ an der ersten Stelle, entsprechen den möglichen Anordnungen einer n-elementigen Menge, also $n!$. Da es für k genau $\#M = n+1$ Wahlmöglichkeiten gibt, erhalten wir insgesamt $(n+1)n! = (n+1)!$ möglichen Anordnungen einer $(n+1)$-elementigen Menge. □

Proposition 2.1.7 Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge M ist durch $\binom{n}{k}$ gegeben.

Beweis. Ist $k = 0$, dann ist $\emptyset$ die einzige nullelementige Teilmenge von M. Dies entspricht $\binom{n}{0} = 1$.
Sei also $n \geq k > 0$. Wir wollen aus M eine Teilmenge N auswählen, die $k = \#N$ Elemente hat. Für das erste Element der Teilmenge $N \subseteq M$ gibt es genau n Wahlmöglichkeiten, nämlich jedes beliebige Element aus M. Für das zweite Element hingegen bleiben nur noch $(n-1)$ Möglichkeiten, da ich das bereits gewählte Element nicht noch einmal wählen darf. Für das dritte Elemente gibt es $n-2$, usw. und schließlich bleiben noch $(n-k+1)$ Möglichkeiten für das k-te Element.
Nun müssen wir noch beachten, dass einige der gewählten Teilmengen mehrfach auftreten, da wir bisher nicht ausgeschlossen haben, dass dieselbe Teilmenge, aber mit in unterschiedlicher Reihenfolge gezogenden Elementen vorkommt. Indem wir durch die Anzahl der möglichen Vertauschungen, die in einer Menge mit k Elementen vorkommen kann, teilen, dann erhalten wir die gesuchte Anzahl von k-elementigen Teilmengen der Menge M.

$$\#\{N \subseteq M \mid \#N = k\} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$ □

Beispiel 2.1.8 Beim Lotto werden 6 Zahlen aus 49 gezogen, das heißt es wird eine 6-elementige Teilmenge aus einer 49-elementigen Menge gewählt. Von diesen Teilmengen gibt es

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13.983.816$$

Lemma 2.1.9 (Eigenschaften des Binomialkoeffizienten)
Seien $n, k \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$, dann gilt:

i)
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{n}{1} = n.$$

ii)
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

iii)
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Beweis. i)

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1, \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1 \quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n$$

ii)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

iii) für $k = 0$ erhalten wir direkt aus Teil i)

$$\binom{n+1}{1} = 1 + n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1},$$

also gilt die Formel.

Für $k \geq 1$ rechnen wir

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} \\
&= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(k+1)}{(k+1)k!} + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} \\
&= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)\big((k+1)+(n-k)\big)}{(k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.1.10 Mithilfe Rechnenregeln aus Lemma 2.1.9 können wir das **Pascalsche Dreieck** aufstellen, an dem man die Binomialkoeffizienten ablesen kann.
Jede Zeile des Dreiecks entspricht einem Wert von n, wobei die oberste Zeile $n = 0$ entspricht. In der n-ten Zeile stehen dann die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$, wobei die Werte für $k = 0, 1, \dots, n$ von links nach rechts eingetragen werden.
Aufgrund von Punkt i) des Lemmas sind die äußeren Einträge im Pascalschen Dreieck immer eine 1. Punkt ii) besagt, dass das Dreieck symmetrisch ist. Außerdem lassen sich unter Verwendung der Additionsformel in Punkt iii) die Einträge in der $n+1$ Zeile als Summe der angrenzenden Einträge der n-ten Zeile bestimmen. Insgesamt erhalten wir folgendes Schema:

$$\begin{array}{lccccccc}
n=0 & & & & \binom{0}{0} & & & \\
n=1 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
n=2 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
n=3 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}$$

Was zu dem Pascalschen Dreieck führt

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Satz 2.1.11 (Binomische Formel)
Seien $x, y \in K, n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Beweis. Der Beweis erfolgt über vollständige Induktion nach n.
Induktionsanfang: Die Formel stimmt für $n = 1$, denn es gilt

$$(x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^{1-1} y^1 = x + y.$$

Wir nehmen an, dass die Formel für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt und zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ gilt:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^1 (x+y)^n && \mid \text{Rechenregeln für Potenzen} \\
&= (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k && \mid \text{Induktionsvoraussetzung} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} && \mid \text{Auflösen der Klammer } (x+y) \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k && \mid \text{Abspalten von } k=0 \text{ von der Summe} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + \binom{n}{n} y^{n+1} && \mid \text{Abspalten von } k=n \text{ von der Summe} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} x^{n-(k+1)+1} y^{k+1} && \mid \text{Shiften der Summe} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + y^{n+1} && \mid \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \right] x^{n-k} y^{k+1} + y^{n+1} && \mid \text{Zusammenfassen gleicher Potenzen} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} x^{n-k} y^{k+1} + y^{n+1} && \mid \text{Lemma 2.1.9iii)} \\
&= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n-(k-1)} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} && \mid \text{Shiften der Summe} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k && \mid \text{Erweitern der Summation auf } k=0 \text{ und } k=n+1
\end{aligned}$$

$\square$

Für $n = 2$ erhalten wir die aus der Schule bekannten binomischen Formeln

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

2.2. Die ganzen Zahlen

Die ganzen Zahlen bilden mit Addition und Multiplikation einen Ring, sie sind abzählbar und haben eine Ordnungsrelation.

In den ganzen Zahlen gibt es eine Division mit Rest, dass heißt für Zahlen $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$, gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{N}$ mit $r < b$, sodass gilt:

$$a = qb + r.$$

Mithilfe der Division mit Rest ist es möglich die Existenz einer g-adischen Darstellung jeder ganzen Zahl $a \in \mathbb{Z}$ zu beweisen. Dabei ist $g \geq 2, g \in \mathbb{N}$ die sogenannte Basis der Darstellung. Wir schreiben

$$a = \pm a_k \dots a_0 \qquad \text{mit } a_i \in \{0, \dots, g-1\}.$$

Dies bedeutet

$$a = \sum_{i=0}^{k} a_i g^i.$$

Für $g = 10$ erhalten wir so die übliche Dezimaldarstellung. Für $g = 2$ ergibt sich die Dualdarstellung.

Beispiel 2.2.1 Wir wollen die Dualdarstellung von $a = 13$ berechnen. Dafür teilen wir a mit Rest durch $g = 2$, dann den Faktor vor der 2 usw.

$$\begin{aligned} 13 &= 6 \cdot 2 + 1 \\ 6 &= 3 \cdot 2 + 0 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 1 &= 0 \cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

Die Dualdarstellung ergibt sich von unten nach oben gelesen aus den Resten.

$$13 = (1101)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 1.$$

2.3. Die rationalen Zahlen

Die rationalen Zahlen bilden mit Addition und Multiplikation einen Körper. Sie sind abzählbar und besitzen eine Ordnungsrelation, die durch

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad b - a \in \mathbb{Q}_+ := \left\{ \frac{r}{s} \mid r, s \in \mathbb{N} \right\}$$

definiert ist.

Satz 2.3.1 (Dezimalbruchdarstellung)
Jede rationale Zahl $a \in \mathbb{Q}$ besitzt eine endliche oder periodische Dezimalbruchdarstellung, das heißt

$$a = \pm(a_0 + \ 0, d_1 d_2 \ldots d_n) \quad :\Leftrightarrow \quad a = \pm\left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k \cdot 10^{-k}\right), \text{bzw.}$$

$$a = \pm(a_0 + \ 0, d_1 \ldots d_n \overline{d_{n+1} \ldots d_{n+t}}) = \pm(a_0 + \ 0, d_1 \ldots d_n d_{n+1} \ldots d_{n+t} d_{n+1} \ldots d_{n+t} \ldots)$$

mit einem ganzzahligen Anteil $a_0 \in \mathbb{Z}$ und Ziffern $d_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.
Ungekehrt entspricht jede endliche oder periodische Dezimalbruchentwicklung einer rationalen Zahl.
Dabei ist die Periode 9 nicht erlaubt, wir identifizieren

$$a = \pm(a_0 + \ 0, d_1 d_2 \ldots d_{k-1} d_k \overline{9}) := \pm(a_0 + \ 0, d_1 d_2 \ldots d_{k-1}(d_k + 1)),$$

wobei $d_k < 9$.

Beweis. Sei $a = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ gegeben mit $\mathrm{ggT}(r, s) = 1$. Der Bruch ist also gekürzt. Um die Dezimalbruchdarstellung zu berechnen, benutzen wir "schriftliche Division", das heißt wir teilen zunächst r mit Rest durch s um a_0 zu bestimmen. Der Rest wird mit der Basis 10 multipliziert und erneut mit Rest durch s geteilt, usw.

$$\begin{aligned} r &= a_0 \cdot s + q_0 \\ q_0 \cdot 10 &= d_1 \cdot s + q_1 \qquad (2.1) \\ q_1 \cdot 10 &= d_2 \cdot s + q_2 \\ &\vdots \qquad (2.2) \end{aligned}$$

Dies liefert die Dezimalbruchdarstellung $a = a_0 + 0, d_1 d_2 \ldots$, denn wir erhalten durch sukzessives Einsetzen der q_i

$$\frac{r}{s} = a_0 + \frac{1}{s} q_0 = a_0 + \frac{1}{s}\left(\frac{d_1}{10} s + \frac{q_1}{10}\right) = a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{1}{10s} q_1 = a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \frac{1}{100s} q_2 = \ldots$$

Da der Rest bei Division durch s kleiner als s ist, also $q_i < s$ folgt $q_i \cdot 10 < s \cdot 10$ und somit ist $d_{i+1} < 10$, da dieser Wert durch die Gleichung $q_i \cdot 10 = d_{i+1} \cdot s + q_{i+1}$ bestimmt ist.
Bei der schriftlichen Division können nun zwei verschiedene Situationen auftreten

1. $q_n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann erhalten wir eine endliche Dezimalbruchdarstellung von $\frac{r}{s}$.

2. $q_{n_0+t} = q_{n_0}$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und $t \geq 1$. Dann gilt auch $d_{n+1} = d_{n+t+1}$ für alle $n \geq n_0$ und wir erhalten eine periodische Dezimalbruchdarstellung.

Da die möglichen Werte für q_i aus der Menge $\{0, 1, \ldots, s-2, s-1\}$ stammen müssen, gibt es keine anderen Möglichkeiten.

Jetzt wollen wir zeigen, dass jede endliche oder periodische Dezimalbruchdarstellung einer rationalen Zahl $a \in \mathbb{Q}$ entspricht.

Eine endliche Dezimalbruchdarstellung entspricht einer rationalen Zahl, da

$$0, d_1 d_2 \dots d_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{10^i}$$

eine Summe von Brüchen ist und somit selbst ein Bruch.
Eine periodische Dezimalbruchdarstellung entspricht einer rationalen Zahl, da gilt

$$0, \overline{d_1 d_2 \dots d_s} = \frac{d_1 d_2 \dots d_s}{\underbrace{999 \dots 99}_{s\text{-mal}}}. \tag{2.3}$$

Um dies zu überprüfen kann man mithilfe des Algorithmus (2.1) nachrechnen, dass

$$\frac{1}{\underbrace{999 \dots 99}_{s\text{-mal}}} = 0, \underbrace{\overline{00 \dots 01}}_{s\text{-Stellen}}$$

gilt.
Daraus folgt nun außerdem, dass $0, \overline{9} = \frac{9}{9} = 1$ und somit eine Periode 9 nicht möglich ist.□

Bemerkung 2.3.2 Dieser Satz gilt analog für jede beliebige Basis $g \geq 2$. Wir müssen lediglich an jeder Stelle im Beweis 10 durch g, bzw. 9 durch $g - 1$ ersetzen.
Wir kennzeichnen die Basis als Index an der Darstellung, so ist zum Beispiel $(0, 101)_2$ eine Dualdarstellung. Gibt es keinen Index, dann handelt es sich um die Dezimaldarstellung.

Beispiel 2.3.3 Für $a = \frac{1}{4}$ gibt es eine abbrechende Dezimalbruchdarstellung und eine abbrechende Dualdarstellung.

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \cdot 4 + 1 \\ 1 \cdot 10 = 10 &= 2 \cdot 4 + 2 \\ 2 \cdot 10 = 20 &= 5 \cdot 4 + 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1 &= 0 \cdot 4 + 1 \\ 1 \cdot 2 = 2 &= 0 \cdot 4 + 2 \\ 2 \cdot 2 = 4 &= 1 \cdot 4 + 0 \end{aligned}$$

Also ist $\frac{1}{4} = 0, 25 = (0, 01)_2$.

Für $a = \frac{1}{7}$ hingegen erhalten wir periodische Darstellungen sowohl zur Basis 10, als auch zur Basis 2.

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \cdot 7 + 1 \\ 1 \cdot 10 = 10 &= 1 \cdot 7 + 3 \\ 3 \cdot 10 = 30 &= 4 \cdot 7 + 2 \\ 2 \cdot 10 = 20 &= 2 \cdot 7 + 6 \\ 6 \cdot 10 = 60 &= 8 \cdot 7 + 4 \\ 4 \cdot 10 = 40 &= 5 \cdot 7 + 5 \\ 5 \cdot 10 = 50 &= 7 \cdot 7 + 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1 &= 0 \cdot 7 + 1 \\ 1 \cdot 2 = 2 &= 0 \cdot 7 + 2 \\ 2 \cdot 2 = 4 &= 0 \cdot 7 + 4 \\ 4 \cdot 2 = 8 &= 1 \cdot 7 + 1 \end{aligned}$$

Also ist $\frac{1}{7} = 0, \overline{142857} = (0, \overline{001})_2$.

Eine wichtige Eigenschaft der rationalen Zahlen ist das Vorhandensein eines Betrags. Dies werden wir zur Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen benötigen.

Definition 2.3.4 Wir definieren auf $\mathbb{Q}$ den **Absolutbetrag** durch

$$|a| := \begin{cases} a & \text{wenn } a > 0 \\ 0 & \text{wenn } a = 0 \\ -a & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$$

Proposition 2.3.5 Der Absolutbetrag $|\cdot| : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_+$ hat folgende Eigenschaften:

i) $|a| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$. (*Definitheit*)

ii) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}$. (*Multiplikativität*)

iii) $|a + b| \leq |a| + |b|$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}$. (*Dreiecksungleichung*)

Beweis. i) und ii) ergeben sich direkt aus der Definition des Absolutbetrags. Um die Dreiecksungleichung zu zeigen, bemerken wir, dass $\pm a \leq |a|$ gilt. Daraus erhalten wir sowohl $a + b \leq |a| + |b|$, als auch $-(a + b) \leq |a| + |b|$ und somit die gewünschte Aussage.□

Lemma 2.3.6 Für den Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$ gelten folgende Aussagen

i) $|-a| = |a|$ für alle $a \in \mathbb{Q}$.

ii) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}$.

iii) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$ (*umgekehrte Dreiecksungleichung*)

Beweis. i) und ii) folgen direkt aus der Definition. Für iii) beachte, dass

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \quad \text{und} \quad |b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a| = |a - b| + |a|$$

gilt. Daraus folgt

$$|a| - |b| \leq |a - b| \quad \text{und} \quad -\left(|a| - |b|\right) \leq |a - b|\,,$$

woraus die umgekehrte Dreiecksungleichung folgt. □

Teil I.

Analysis

3. Die reellen Zahlen

3.1. Warum benötigen wir die reellen Zahlen?

Wir haben im letzten Kapitel die Zahlenbereiche schrittweise erweitert, bis wir den Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erhalten haben, in dem wir nun die Grundrechenarten $+, -, \cdot, :$ uneingeschränkt (abgesehen von der Division durch null) durchführen können.

Trotzdem enthält die Menge der rationalen Zahlen noch nicht alle Zahlen, die wir benötigen um zum Beispiel Geometrie zu betreiben oder Prozesse in der Physik oder Biologie zu beschreiben.
Wollen wir zum Beispiel die Länge der Diagonale a eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 berechnen, dann erfüllt diese Länge nach dem Satz von Pythagoras $a^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Aber die Zahl $a = \sqrt{2}$ liegt nicht in den rationalen Zahlen.

Lemma 3.1.1 Die quadratische Gleichung

$$x^2 = 2 \tag{3.1}$$

besitzt keine Lösung in den rationalen Zahlen.

Beweis. Wir zeigen diese Aussage mit einem Widerspruchsbeweis. Dafür nehmen wir an $x = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ sei eine Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 = 2$. Wir können dabei annehmen, dass der Bruch gekürzt ist, also r und s teilerfremd sind.
Nun folgt aus $\frac{r^2}{s^2} = 2$, dass $r^2 = 2s^2$ gilt. Daraus schließen wir, dass r^2 eine gerade Zahl ist, was nur dann möglich ist, wenn auch r eine gerade Zahl ist.
Wir schreiben daher $r = 2r'$ und erhalten durch Einsetzen $r^2 = 4(r')^2 = 2s^2$ und daher $s^2 = 2(r')^2$. Daraus können wir analog zu eben schließen, dass s eine gerade Zahl ist.
Aus der Annahme, das es eine rationale Lösung $x = \frac{r}{s}$ der Gleichung $x^2 = 2$ gibt, haben wir also gefolgert, dass sowohl der Zähler als auch der Nenner dieser Lösung gerade Zahlen sind. Dies steht im Widerspruch zur Tatsache, dass wir angenommen haben, dass der Bruch gekürzt ist. Somit gibt es keine rationale Lösung dieser Gleichung. □

Es ist also nicht möglich die *genaue* Lösung der quadratischen Gleichung (3.1) in den rationalen Zahlen zu bestimmen. Aber es ist möglich rationale Zahlen zu bestimmen, die die genaue Lösung immer besser approximieren. Konkret bedeutet dies folgendes:

Lemma 3.1.2 Es gibt rationale Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und $b_0, b_1, b_2, \ldots$, die folgende Eigenschaften haben:

i) Die Zahlen a_n werden mit wachsendem Index größer, die Zahlen b_n hingegen kleiner, aber trotzdem bleibt immer a_n kleiner als b_n:

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n, \quad \text{für allen} \in \mathbb{N}.$$

ii) Die Zahl a_n ist kleiner als die Lösung x der Gleichung (3.1), wohlgegen b_n größer als x ist

$$a_n^2 < 2 < b_n^2, \quad \text{für allen} \in \mathbb{N}.$$

iii) Die Zahlen a_n und b_n nähern sich mit wachsendem Index immer mehr an, konkret bedeutet das

$$|b_n - a_n| \leq 10^{-n} \quad \text{für allen} \in \mathbb{N}.$$

Da sich a_n und b_n nur um einen Wert, der kleiner ist als 10^{-n} unterscheiden, approximieren sie die exakte Lösung x der Gleichung (3.1) bis auf 10^{-n} genau. Denn aufgrund von $a_n < x < b_n$ gilt

$$|b_n - a_n| = |b_n - x + x - a_n| = |b_n - x| + |x - a_n| \leq 10^{-n}.$$

Und damit folgt

$$|b_n - x| \leq 10^{-n} \quad \text{und} \quad |x - a_n| \leq 10^{-n}.$$

Beweis. Wir konstruieren die Zahlen a_n und b_n als endliche Dezimalbrüche, somit sind sie aufgrund von Satz 2.3.1 rationale Zahlen. Dabei haben die Zahlen mit Index n genau n Nachkommastellen.
Wir können leicht nachrechnen, dass für $n = 0, 1, 2$ die gewünschten Eigenschaften durch folgende Zahlen erfüllt sind:

$$a_0 = 1 \quad b_0 = 2 \quad a_1 = 1,4 \quad b_1 = 1,5 \quad a_2 = 1,41 \quad b_2 = 1,42.$$

Nun wollen wir erklären, wie ausgehend von a_n und b_n die Zahlen a_{n+1} und b_{n+1} bestimmt werden.
Um ausgehend von $a_n = 1, d_1 d_2 \dots d_n$ die Zahl $a_{n+1} = 1, d_1 d_2 \dots d_n d_{n+1}$ zu konstruieren, probiert man der Reihe nach die Werte $d_{n+1} = 0, 1, 2, \dots, 9$ durch und wählt das größtmögliche d_{n+1} sodass noch $a_{n+1}^2 < 2$ gilt.
Ist $a_{n+1} = 1, d_1 d_2 \dots d_n d_{n+1}$, dann ist $b_{n+1} = 1, d_1 d_2 \dots d_n (d_{n+1} + 1)$, falls $d_{n+1} < 9$ bzw. $b_n = 1, d_1 d_2 \dots (d_k + 1) 0 \dots 0$ wenn $d_{k+1} = d_{k+2} = \dots = d_n = d_{n+1} = 9$, aber $d_k < 9$. Dadurch haben wir sichergestellt, dass

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| = |1, d_1 d_2 \dots d_n (d_{n+1} + 1) - 1, d_1 d_2 \dots d_n d_{n+1}| = 0, \underbrace{0 \dots 0}_{n\text{-mal}} 1 \leq 10^{-(n+1)}$$

gilt.
Außerdem ist $b_{n+1}^2 > 2$, denn wäre dies nicht der Fall, würde das im Widerspruch zur Maximalität von d_{n+1} mit der Eigenschaft $a_{n+1}^2 < 2$ stehen. □

Wir haben mit diesem Lemma gezeigt, dass die Zahl $\sqrt{2}$ zwar nicht in den rationalen Zahlen liegt, aber trotzdem beliebig genau durch solche approximiert werden kann. Diese Eigenschaft hat $\sqrt{2}$ mit allen reellen Zahlen gemeinsam. Um dies präzise fassen zu können, werden wir uns mit dem Begriff der Folge beschäftigen.

3.2. Folgen und Grenzwerte

Wir definieren hier zunächst Folgen in einem allgemeinen Körper, der eine Betragsfunktion $|\cdot|$ besitzt. Wir denken dabei zunächst an $K = \mathbb{Q}$ und werden später auch $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ verwenden.

Definition 3.2.1 Sei K ein Körper. Eine **Folge** von Zahlen aus K ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\to K \\ n &\mapsto a(n) = a_n. \end{aligned}$$

Wir schreiben dies in der Form

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots).$$

Die Zahlen a_0, a_1, usw. heißen Folgenglieder.

Beispiel 3.2.2 Es gibt verschiedene Möglichkeiten Folgen anzugeben. Eine Möglichkeit besteht in der Angabe einer expliziten Formel für die Berechnung der einzelnen Folgenglieder, wie zum Beispiel

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = n^2 \quad \text{oder} \quad a_n = \frac{2}{n+3}.$$

Dabei können auch Fallunterscheidungen auftreten, wie zum Beispiel

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = \begin{cases} n^2 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ n^2 - 1 & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Eine andere Möglichkeit Folgen anzugeben ist durch eine rekursive Definition, d.h. durch eine Formel, die angibt wie man das nächste Folgenglied ausgehend von dem vorherigen berechnet.

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

wobei $f : K \to K$ eine Funktion ist. Außerdem muss das erste Folgenglied a_0 vorgegeben sein. Zum Beispiel

$$a_{n+1} = 2a_n^2 + 1, \quad a_0 = 1$$

liefert die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 3, 19, 723, \dots).$$

Die in Lemma 3.1.2 berechneten Zahlen bilden zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese Folgen sind ebenfalls rekursiv definiert, da eine Regel angegeben wurde mithilfe derer man ausgehend von a_n das Folgenglied a_{n+1} berechnet.
Rekursive Definitionen können auch von den vorherigen k Folgengliedern abhängen, dann müssen die ersten k Folgenglieder vorgegeben sein.

$$a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-k+1}) \quad a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \text{ vorgegeben.}$$

Ein bekanntes Beispiel einer rekursiv definierten Folge, die von den vorherigen zwei Folgengliedern abhängt, ist die *Fibonacci*-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad a_0 = a_1 = 1$$

definiert ist.

Definition 3.2.3 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K **konvergiert** gegen den **Grenzwert** $a \in K$, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n > N_\epsilon$ gilt:

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

Wir schreiben dann dafür $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $(a_n \to a)$ für $(n \to \infty)$.
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Nullfolge**, wenn ihr Grenzwert null ist, d. h. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Mithilfe der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt also für eine konvergente Folge für alle Folgenglieder ab einem gewissen Index

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| < \epsilon.$$

Diese bedeutet, dass diese Folgenglieder in einem ϵ-Streifen liegen

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon. \tag{3.2}$$

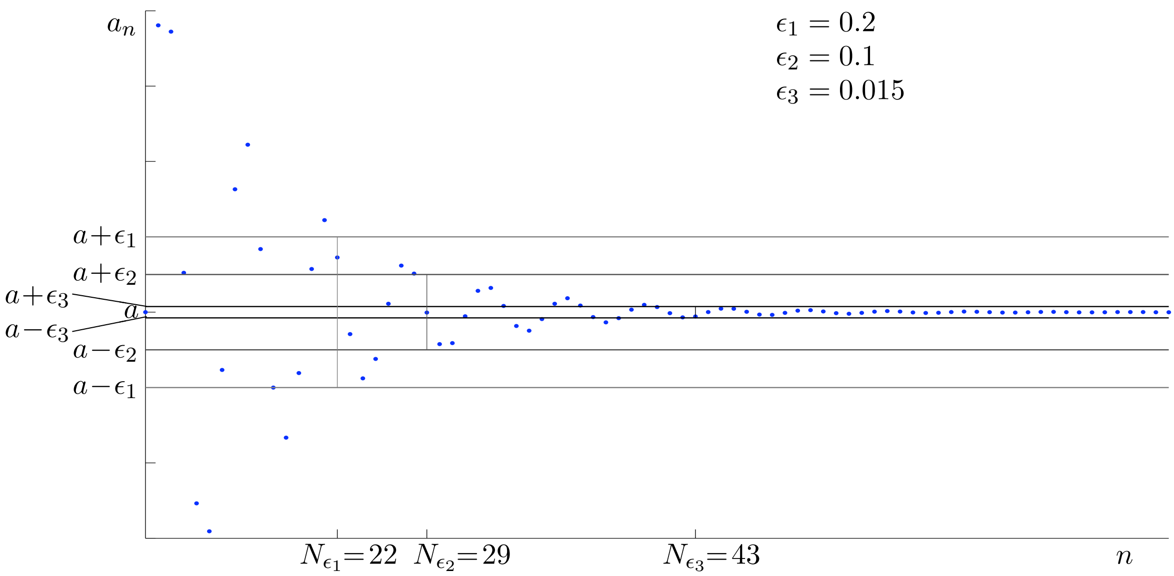

Abbildung 3.1.: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen den Grenzwert a konvergiert.Die Folgenglieder a_n sind durch die blauen Punkte gekennzeichnet. Die x-Achse kennzeichnet den Index. Geben wir uns $\epsilon_1 = 0.2$ vor, dann sehen wir, dass alle Folgenglieder ab dem Index $N_{\epsilon_1} = 22$ innerhalb des Streifen $a - \epsilon_1 < a_n < a + \epsilon_1$ liegen. Für den kleineren Wert $\epsilon_2 = 0.1$ ist der Index durch $N_{\epsilon_2} = 29$ gegeben. Wählen wir hingegen $\epsilon_3 = 0.015$, dann liegen erst ab dem Index $N_{\epsilon_3} = 43$ alle Folgenglieder im ϵ_3.

Für die Frage nach der Konvergenz der Folge ist es irrelevant wie sich eine gewisse endliche Zahl von Folgengliedern verhält. Entscheidend ist, dass alle Folgenglieder ab dem Index N_ϵ im ϵ-Streifen (3.2) liegen, egal wie klein das vorgegebene ϵ ist. Je schmaler der Streifen ist, umso größer muss der Index N_ϵ gewählt werden.

Wichtig bei der Definition einer konvergenten Folge ist die Tatsache, dass der Grenzwert in dem gleichen Körper liegen muss, wie die Folgenglieder. So sind also die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Lemma 3.1.2 nicht konvergent in $\mathbb{Q}$, denn der einzige mögliche Grenzwert wäre $\sqrt{2}$, der nicht in $\mathbb{Q}$ liegt.

Beispiel 3.2.4 1. Wir betrachten die konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = a \in \mathbb{Q}$. Diese Folge konvergiert gegen den Grenzwert a, denn für jedes $\epsilon > 0$ wählen wir $N_\epsilon = 0$ und sehen, dass für alle Folgenglieder a_n mit $n \geq 0$ gilt:

$$|a_n - a| = |a - a| = 0 < \epsilon.$$

2. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ definiert eine Nullfolge in $\mathbb{Q}$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann setzen wir $N_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}$ und sehen, dass für alle $n > N_\epsilon$ gilt:

$$\left|a_n - 0\right| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N_\epsilon} = \epsilon.$$

3. Auch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Folgengliedern

$$a_n = \begin{cases} n^3 & \text{für } n < 10^6 \\ \frac{1}{n} & \text{für } n \geq 10^6 \end{cases}$$

ist eine Nullfolge. Ist $\epsilon > 10^{-6}$, dann wählen wir $N_\epsilon = 10^6$ und rechnen nach, dass für alle $n \geq 10^6$ gilt

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq 10^{-6} < \epsilon.$$

Für $\epsilon \leq 10^{-6}$ setzen wir $N_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}$ und sind in derselben Situation wie in Punkt 2 dieses Beispiels.

Proposition 3.2.5 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K, dann ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir führen diesen Beweis per Widerspruch und nehmen an es gibt zwei Grenzwerte a und a', die unterschiedlich sind $a \neq a'$. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \geq N_\epsilon$ gilt

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \text{und} \quad \left|a_n - a'\right| < \epsilon.$$

Wir wählen nun ein $\epsilon < \frac{1}{2}|a - a'|$ und bemerken, dass dann gilt

$$2\epsilon < \left|a - a'\right| = \left|a - a_n + a_n - a'\right| \leq |a - a_n| + \left|a_n - a'\right| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Dies ist aber ein Widerspruch und somit kann es nur einen Grenzwert geben. □

Definition 3.2.6 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K heißt **beschränkt**, wenn es ein $k \in K$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n| \leq k.$$

Eine Folge heißt **strikt divergent**, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq N_\epsilon$ gilt:

$$|a_n| > \frac{1}{\epsilon}.$$

Wir schreiben dann $\lim a_n = \infty$ oder $(a_n \to \infty)$ für $(n \to \infty)$.

Beispiel 3.2.7

1. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt mit Schranke $k = 1$ (jede Zahl $k \geq 1$ ist eine Schranke), denn es gilt $|a_n| = |(-1)^n| = 1 \leq 1$.
2. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = n$ ist strikt divergent. Sei dafür $\epsilon > 0$ vorgegeben, dann ist $N_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}$ und es gilt für alle $n \geq N_\epsilon$
$$|a_n| = n \geq N_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}.$$
3. Die Folge a_n mit
$$a_n = \begin{cases} n & \text{wenn } n \text{ gerade ist,} \\ 1 & \text{wenn } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$
ist nicht beschränkt, denn wäre k eine Schranke, dann gilt für das Folgenglied a_n, wobei $n > k$ und n gerade $a_n = n > k$ im Widerspruch zur Eigenschaft, dass k eine Schranke der Folge ist.

   Diese Folge ist aber auch nicht strikt divergent, denn zu einem vorgegeben $1 > \epsilon > 0$ gilt für alle Folgenglieder mit ungeradem Index n, dass $|a_n| = 1 < \frac{1}{\epsilon}$.

Lemma 3.2.8 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zahlen aus K mit $a_n \neq 0$ ist Nullfolge, genau dann wenn die Folge der Reziproken $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt divergiert.

Beweis. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein N_ϵ gibt, sodass $|a_n| < \epsilon$. Dies ist gleichbedeutend mit $\left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\epsilon}$ woraus die strikte Divergenz der Folge $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt. □

Lemma 3.2.9 Wenn eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zahlen aus K gegen $a \in K$ konvergiert, dann konvergiert auch die Folge der Absolutbeträge gegen den Absolutbetrag des Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|.$$

Beweis. Wir benutzen dafür die Dreiecksungleichung aus der folgt

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty. \qquad \square$$

In Beispiel 3.2.7 3. haben wir eine Folge gesehen, für die sich die Folgenglieder mit geradem Index ganz anders verhält, als die Folgenglieder mit ungeradem Index. Um solche Situationen besser beschreiben zu können, benötigen wir den Begriff einer Teilfolge, der auch in vielen Beweisen sehr nützlich ist.

Definition 3.2.10 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K, dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

$$\{n_k \mid k \in \mathbb{N}, n_{k+1} > n_k\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Haben wir also eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vorgegeben, dann erhalten wir eine Teilfolge davon, indem wir gewisse Folgenglieder auswählen. Wichtig ist, dass wir unendlich viele Folgenglieder wählen müssen und dabei die Reihenfolge nicht ändern. Deshalb ist $(a_0, a_5, a_9, \dots)$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, aber $(a_2, a_0, a_8, a_6, \dots)$ hingegen nicht.

Beispiel 3.2.11

- Sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = n^2$ gegeben, das heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \dots)$. Wir definieren $n_k = 2k, k \in \mathbb{N}$, das liefert uns die Teilfolge

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = \big(n_k^2\big)_{k\in\mathbb{N}} = \big((2k)^2\big)_{k\in\mathbb{N}} = \big(4k^2\big)_{k\in\mathbb{N}} = (0, 4, 16, 36, 64, \dots).$$

- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Beispiel 3.2.7 3. hat zwei Teilfolgen mit unterschiedlichen Eigenschaften. So ist die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_k = 2k$ strikt divergent, wohingegen $(a_{n_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit $n_\ell = 2\ell + 1$ den konstanten Wert 1 hat.

Der wichtigste Begriff, denn wir zur Konstruktion der reellen Zahlen benötigen ist der Begriff der Cauchy-Folge.

Definition 3.2.12 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K heißt **Cauchy-Folge**, wenn für alle $\epsilon > 0$ eine $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n, m > N_\epsilon$ gilt:

$$|a_n - a_m| < \epsilon.$$

Der Begriff der Cauchy-Folge ist eng verwandt mit dem Begriff einer konvergenten Folge, da er besagt, dass alle Folgenglieder ab einem gewissen Index in einem ϵ-Streifen liegen müssen, egal wie klein das vorgegebene ϵ ist. Sie nähern sich daher ähnlich wie konvergente Folgen einem Wert immer mehr an. Aber da dieser Wert in der Definition der Cauchy-Folge nicht vorkommt, spielt es keine Rolle ob dieser Wert im Körper K liegt in dem wir die Folge betrachten. Deshalb kann eine Folge, die nicht konvergent ist trotzdem eine Cauchy-Folge sein.

Beispiel 3.2.13 Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Lemma 3.1.2, die $\sqrt{2}$ approximieren sind Cauchy-Folgen. Um dies zu sehen seien $m > n$ gegeben, dann gilt aufgrund von Lemma 3.1.2i) $a_n \geq a_m > b_m \geq b_n$ und somit

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - b_n| \leq 10^{-n}.$$

Ist also $\epsilon > 0$ vorgegeben, dann wählen wir N_ϵ, sodass $10^{-N_\epsilon} < \epsilon$, und dann gilt für alle $n, m \geq N_\epsilon$ mit $m > n$, dass $|a_n - a_m| < 10^{-n} \leq 10^{-N_\epsilon} < \epsilon$.
Für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funktioniert der Beweis analog.

Proposition 3.2.14 Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und eine $\epsilon > 0$ vorgegeben, dann gibt es aufgrund der Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine N_ϵ sodass für alle $n, m > N_\epsilon$ gilt:

$$|a_n - a| < \frac{1}{2}\epsilon \quad \text{und} \quad |a_m - a| < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Daraus können wir nun schließen, dass

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon. \qquad \square$$

In der letzten Zeile des Beweises von Proposition 3.2.14 haben wir einen Trick benutzt, der im Verlauf der Vorlesung noch häufiger vorkommen wird.
Wir haben zu dem Ausdruck $|a_n - a_m|$, den wir abschätzen wollen, eine Null $0 = -a + a$ addiert und dann die Dreiecksungleichung darauf angewandt. So haben wir Ausdrücke erhalten von denen wir eine Abschätzung kennen und die wir benutzen können.

Lemma 3.2.15 Jede Cauchyfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Beweis. Angenommen die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge, aber nicht beschränkt. Es gibt also Folgenglieder die größer als jede Schranke werden. Das heißt es gibt eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ die strikt divergent ist. Aus dieser Teilfolge lässt sich nun eine weitere Teilfolge $(a_{n_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ extrahieren, die folgende Eigenschaft hat:

$$\left|a_{n_{\ell+1}}\right| > 2\left|a_{n_\ell}\right| \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Dies ist möglich, da $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ strikt divergent ist. Denn dies besagt, dass wir für jedes ϵ unendlich viele Folgenglieder haben, sodass $|a_{n_k}| > \frac{1}{\epsilon}$ ist. Wählen wir daher ϵ sodass $\frac{1}{\epsilon} > 2\left|a_{n_\ell}\right|$, dann liefert uns dies die gewünschte Teilfolge.
Somit gilt

$$\left|a_{n_{\ell+1}} - a_{n_\ell}\right| \geq \left|a_{n_{\ell+1}}\right| - \left|a_{n_\ell}\right| > \left|a_{n_\ell}\right| \to \infty \quad \text{für} \quad \ell \to \infty.$$

Dies steht im Widerspruch zur Eigenschaft eine Cauchy-Folge zu sein. Denn zu einem vorgegebenen $\epsilon > 0$ gibt es ein $\ell \in \mathbb{N}$, sodass für die Folgenglieder $\left|a_{n_{\ell+1}} - a_{n_\ell}\right| > \epsilon$ gilt. $\square$

Aus diesem Lemma folgt insbesondere aufgrund von Proposition 3.2.14, dass auch jede konvergente Folge beschränkt ist.

Proposition 3.2.16 Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in K, bzw. konvergente Folgen mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

i) Dann sind $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in K, bzw. konvergente Folgen mit den Grenzwerten $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ und $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

ii) Gilt für alle Folgenglieder $|b_n| > \alpha > 0$ dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge, bzw. konvergente Folge mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

iii) Gilt $a_n \leq b_n$ für alle (bis auf endlich viele) Folgenglieder, so ist $a \leq b$, sofern beide Folgen konvergent sind.

Beweis. Da die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen sind, sind sie aufgrund von Lemma 3.2.15 beschränkt. Wir wählen k eine gemeinsame Schranke beider Folgen. Sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben, dann gibt es natürliche Zahlen N_ϵ^a und N_ϵ^b, sodass für alle $n, m > N_\epsilon^a$, bzw. $n, m > N_\epsilon^b$ gilt:

$$|a_n - a_m| \leq \frac{1}{2}\epsilon \quad \text{und} \quad |b_n - b_m| \leq \frac{1}{2}\epsilon. \tag{3.3}$$

i) Seien jetzt $n, m > \max\{N_\epsilon^a, N_\epsilon^b\}$, dann ist

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| &= |(a_n - a_m) + (b_n - b_m)| && \mid \text{umsortieren} \\ &\leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| && \mid \text{Dreiecksungleichung} \\ &\leq \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon. && \mid \text{Abschätzung (3.3)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |(a_n \cdot b_n) - (a_m \cdot b_m)| &= |(a_n - a_m)b_n + a_m(b_n - b_m)| && \mid \text{Einfügen von } a_m b_n - a_m b_n \\ &\leq |a_n - a_m|\,|b_n| + |a_m|\,|b_n - b_m| && \mid \text{Dreiecksungleichung} \\ &\leq \frac{1}{2}\epsilon \cdot |b_n| + |a_n| \cdot \frac{1}{2}\epsilon && \mid \text{Abschätzung (3.3)} \\ &\leq \frac{1}{2}\epsilon \cdot k + k \cdot \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon \cdot k. && \mid k \text{ ist Schranke für beide Folgen.} \end{aligned}$$

Aus diesen Rechnungen folgt, dass sowohl $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen sind.

ii) Da gilt $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, genügt es zu zeigen, dass $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Wir rechnen nach, dass für alle $n, m \geq N_\epsilon^b$ gilt:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_m}\right| &= \left|\frac{b_m - b_n}{b_n b_m}\right| && \mid \text{Hauptnenner bilden} \\ &= \frac{|b_m - b_n|}{|b_n||b_m|} && \mid \text{Rechnenregeln für den Betrag} \\ &\leq \frac{|b_m - b_n|}{\alpha^2} && \mid |b_n| \geq \alpha \\ &\leq \frac{\epsilon}{2\alpha^2}. && \mid \text{Abschätzung (3.3)} \end{aligned}$$

Sowohl für Summen, Produkte als auch Quotienten konvergenter Folgen erhalten wir die entsprechden Aussagen über die Grenzwerte, wenn wir in den Beweisen a_m durch den Grenzwert a, bzw. b_m durch b ersetzen.

iii) Wir nehmen an, dass für die Grenzwerte $b < a$ gilt, dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass $b + \delta = a$. Dieses δ benutzen wir als ϵ aus der Definition der Konvergenz, das heißt es gibt ein N_δ, sodass $|b_n - b| < \frac{1}{2}\delta$ und $|a_n - a| < \frac{1}{2}\delta$ für alle $n \geq N_\delta$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} b_n &= b_n - b + b - a + a - a_n + a_n \\ &\leq |b_n - b| + b - a + |a - a_n| + a_n \\ &< \frac{1}{2}\delta - \delta + \frac{1}{2}\delta + a_n = a_n. \end{aligned}$$

Dies steht im Wiederspruch zur Voraussetzung, dass $a_n \leq b_n$ für fast alle n gilt. Somit muss auch für die Grenzwerte $a \leq b$ gelten. □

In dem Beweis zu Proposition 3.2.16 haben wir mehrfach zu einem vorgegebenen ϵ gezeigt, dass für die Differenz zweier Folgenglieder $|a_n - a_m| < c \cdot \epsilon$ gilt, wobei $c \in K$, statt zu zeigen, dass $|a_n - a_m| < \epsilon$. Dies stellt aber kein Problem dar, denn wenn ϵ beliebig klein wird, dann wird auch $c \cdot \epsilon$ beliebig klein.

3.3. Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass es in dem Körper $\mathbb{Q}$ Folgen gibt, die zwar Cauchy-Folgen sind, aber trotzdem nicht in $\mathbb{Q}$ konvergent sind. Das liegt daran, dass sich diese Cauchy-Folgen einem Wert nähern, der allerdings nicht in $\mathbb{Q}$ liegt.
Dies ist ungünstig und wir wollen daher unseren Zahlenbereich genau um alle "Grenzwerte" von Folgen in $\mathbb{Q}$ erweitern, die nicht in $\mathbb{Q}$ liegen. Dies liefert uns genau die Menge der reellen Zahlen.

Wir betrachten die folgenden Mengen von Folgen rationaler Zahlen

$$\mathcal{C} := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \text{Cauchy-Folge in } \mathbb{Q}\}$$

$$\mathcal{N} := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \text{Nullfolge in } \mathbb{Q}\} \subset \mathcal{C}$$

Nun definieren wir auf der Menge $\mathcal{C}$ aller Cauchy-Folgen rationaler Zahlen eine Äquivalenzrelation durch:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad :\Leftrightarrow \quad (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{N}.$$

Zwei Cauchy-Folgen sind also äquivalent zueinander, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist, also $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ gilt.
Insbesondere bedeutet dies, dass zwei konvergente Folgen äquivalent zueinander sind, wenn sie denselben Grenzwert besitzen.

Lemma 3.3.1 Die Relation $\sim$ auf $\mathcal{C}$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Wir prüfen die drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation direkt nach, wobei wir für die Symmetrie und die Transitivität die Rechenregel für Grenzwerte benötigen (s. Prop. 3.2.16).

Reflexivität $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, denn $(a_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$ und die konstante Folge von Nullen ist eine Nullfolge.

Symmetrie Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, denn aus $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = -\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = -0 = 0$.

Transitivität Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann ist auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, da $\lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n - b_n + b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n - b_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 + 0 = 0$. □

Wir bezeichnen eine Äquivalenzklasse bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$ mit eckigen Klammern, das heißt

$$[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] = \{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}.$$

Sofern die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert a konvergiert, dann enthält die Äquivalenzklasse $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ alle Folgen, die ebenfalls den Grenzwert a besitzen.

Definition 3.3.2 Wir nennen $\tilde{\mathbb{R}}$ die Menge aller Äquivalenzklassen von $\mathcal{C}$ bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$

$$\tilde{\mathbb{R}} = \mathcal{C}/_\sim = \mathcal{C}/\mathcal{N} = \{[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}\}.$$

Satz 3.3.3 Jede Äquivalenzklasse $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \tilde{\mathbb{R}}$ entspricht genau einem Dezimalbruch. Die Menge dieser Dezimalbrüche bezeichnen wir als Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

$$\mathbb{R} = \left\{a := \pm(a_0 +\ 0,d_1d_2d_3\dots) \mid a_0 \in \mathbb{N}, d_k \in \{0,1,2,\dots,8,9\}\right\}$$

Jede Cauchy-Folge rationaler Zahlen entspricht einem $a \in \mathbb{R}$, dass wir deren Grenzwert nennen $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt approximierende Folge von $a \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass jeder Dezimalbruch $z = \pm(z_0 +\ 0,d_1d_2d_3\dots) \in \mathbb{R}$ einer Cauchyfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{Q}$ entspricht. Dafür definieren wir die Folgenglieder

$$a_n := z_0 +\ 0,d_1d_2d_3\dots d_n \in \mathbb{Q}.$$

Diese definiert eine Cauchy-Folge, denn es gilt für $n \geq m+1$ folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= |0,0\dots0d_{m+1}\dots d_n| && \text{| die ersten } m \text{ Nachkommastellen sind gleich}\\
&= d_{m+1}10^{-(m+1)} + \dots + d_n 10^{-n} && |\\
&\leq 9(10^{-(m+1)} + \dots + d_n 10^{-n}) && |\ d_i \leq 9\\
&= 9 \cdot 10^{-(m+1)}(1 + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10^{n-(m+1)}}) && \text{| Ausklammern}\\
&= 9 \cdot 10^{-(m+1)} \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{-n+m+2}}{1 - \frac{1}{10}} && \text{| geometrische Summenformel}\\
&\leq 9 \cdot 10^{-(m+1)} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} && |\\
&= 9 \cdot 10^{-(m+1)} \frac{10}{9} = 10^{-m} && |
\end{aligned}$$

Da 10^{-m} eine Nullfolge ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, sodass $|10^{-m}| < \epsilon$ und damit auch $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $m, n > N_\epsilon$.

Nun wollen wir beweisen, dass jeder Äquivalenzklasse von Cauchy-Folgen $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \tilde{\mathbb{R}}$ ein Dezimalbruch $z \in \mathbb{R}$ zugeordnet werden kann.
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, dann ordnen wir ihr $z = 0$ zu. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, dann können wir annehmen, dass für alle bis auf endlich viele Folgenglieder $a_n > 0$ gilt (der Fall $a_n < 0$ funktioniert analog). Da Cauchy-Folgen beschränkt sind, gibt es außerdem ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $a_n < N$ gilt für alle Folgenglieder.
Aufgrund der Eigenschaft eine Cauchy-Folge zu sein gibt es nun ein $z_0 \in \mathbb{N}$ sodass für alle bis auf endlich viele Folgenglieder gilt

$$0 \leq z_0 \leq a_n < z_0 + 1 \leq N.$$

Nun bestimmen wir die erste Nachkommastelle d_1 des Dezimalbruchs so dass für alle bis auf endlich viele Folgenglieder gilt

$$z_0 \leq z_0 + d_1 10^{-1} \leq a_n < z_0 + (d_1+1)10^{-1} \leq z_0 + 1.$$ □

Bemerkung 3.3.4 Dieser Beweis funktioniert analog zu jeder anderen Basis $g \in \mathbb{N}, g \geq 2$.

Wir übertragen die Addition und Multiplikation, die Ordnung und den Betrag von den rationalen Zahlen auf die reellen Zahlen

- $|a| = \lim_{n\to\infty} |a_n|$
- $a + b = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ und $a \cdot b = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$
- $a > b$ gilt genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) > 0$.

Daraus folgt, dass für die Addition, Multiplikation, Betrag und Größer-Relation die gleichen Regeln wie in den rationalen Zahlen gelten.
Wir haben also diesbezüglich nichts gegenüber den rationalen "verloren". Dafür haben wir gewonne, dass die reellen Zahlen vollständig sind.

Definition 3.3.5 Ein Körper K heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in K einen Grenzwert in K besitzt.

Definition 3.3.6 Wir sagen, dass der Körper K **dicht** im Körper L liegt, wenn für jedes Element $a \in L$ folgendes gilt: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $q_a \in K$ mit $|a - q_a| < \epsilon$.

Satz 3.3.7
1. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper, der $\mathbb{Q}$ als Teilkörper enthält.
2. $\mathbb{R}$ ist vollständig.
3. $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.

Beweis.
1. Jede Zahl aus $\mathbb{R}$ ist der Grenzwert einer Cauchy-Folge aus $\mathbb{Q}$. Aufgrund von Proposition 3.2.16 übertragen sich alle Rechenregeln direkt von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$.

   $\mathbb{Q}$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{R}$, da für jedes $q \in \mathbb{Q}$ die konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = q$ eine konvergente Folge und damit insbesondere eine Cauchy-Folge ist. Somit ist die Eins (bzw. die Null) in $\mathbb{R}$ die konstante Folge $a_n = 1$ (bzw. $a_n = 0$).

2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Das heißt zu jedem vorgegebenen $\epsilon > 0$, gibt es ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n, m \geq N_\epsilon$ gilt

   $$|a_n - a_m| < \frac{1}{3}\epsilon. \tag{3.4}$$

   Wir wollen jetzt zeigen, dass diese Folge einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ besitzt. Da jedes Folgenglied $a_n \in \mathbb{R}$ liegt, gibt es Folgen $(a_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen mit

   $$a_n = \lim_{m\to\infty} a_{n,m}.$$

   Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es also ein $k_n \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

   $$|a_n - a_{n,k_n}| < \frac{1}{3}\epsilon \tag{3.5}$$

   Wollen wollen nun zeigen, dass die Folge $(a_{n,k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge rationaler Zahlen ist. Sei dafür $\epsilon > 0$ vorgegeben, dann gilt für alle $n, m \geq N_\epsilon$

   $$\begin{aligned} |a_{n,k_n} - a_{m,k_m}| &= |a_{n,k_n} - a_n + a_n - a_m + a_m - a_{m,k_m}| && \mid \text{Einfügen von 0} \\ &\leq |a_{n,k_n} - a_n| + |a_n - a_m| + |a_m - a_{m,k_m}| && \mid \text{Dreiecksungleichung} \\ &< \frac{1}{3}\epsilon + |a_n - a_m| + \frac{1}{3}\epsilon && \mid \text{Abschätzung (3.5)} \\ &< \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon = \epsilon. && \mid \text{Abschätzung (3.4)} \end{aligned}$$

   Da also $(a_{n,k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge rationaler Zahlen ist, besitzt diese Folge einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Das heißt zu jeden $\epsilon > 0$, gibt es ein $\tilde{N}_\epsilon \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N_\epsilon$

   $$|a_{n,k_n} - a| < \frac{2}{3}\epsilon. \tag{3.6}$$

Dieser Wert a ist dann aber auch Grenzwert der ursprünglich betrachteten Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, denn es gilt für alle $n, m \geq \max N_\epsilon, \tilde{N}_\epsilon$

$$\begin{aligned}
|a_n - a| &= |a_n - a_{n,k_n} + a_{n,k_n} - a| && \mid \text{Einfügen von } 0 \\
&\leq |a_n - a_{n,k_n}| + |a_{n,k_n} - a| && \mid \text{Dreiecksungleichung} \\
&< |a_n - a_{n,k_n}| + \frac{2}{3}\epsilon && \mid \text{Abschätzung (3.6)} \\
&< \frac{1}{3}\epsilon + \frac{2}{3}\epsilon = \epsilon. && \mid \text{Abschätzung (3.5)}
\end{aligned}$$

3. Da jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ Grenzwert einer Cauchy-Folge aus $\mathbb{Q}$ ist, folgt direkt die Tatsache, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt. □

Die Vollständigkeit des Körpers $\mathbb{R}$ lässt sich über verschieden gleichwertige Eigenschaften charakterisieren. Eine sehr nützlich davon ist die Intervallschachtelungseigenschaft.

Definition 3.3.8 Eine **Intervallschachtelung** ist eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} \mid a_n \leq x \leq b_n\}$$

mit den Eigenschaften

i) $I_{n+1} \subset I_n$

ii) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n der Länge $|b_n - a_n| < \epsilon$.

Satz 3.3.9 Zu jeder Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ gibt es genau eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, die in allen Intervallen I_n liegt, das heißt

$$c = \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n.$$

3.4. Die Axiome der reellen Zahlen

Nach der Konstruktion der reellen Zahlen wollen wir in diesem Abschnitt alle wichtigen Eigenschaften der reellen Zahlen zusammenfassen.

Satz 3.4.1 (Die Axiome der reellen Zahlen)
Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind ein vollständiger, archimedisch angeordneter Körper, d.h.

- $\mathbb{R}$ ist ein Körper
  - $(\mathbb{R}, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0 und inversen Elementen $-a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.
  - $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 1 und inversen Elementen $a^{-1} = \frac{1}{a}$ für alle $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

- Es gilt das Distributivgesetz, d. h. für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

- $\mathbb{R}$ ist angeordnet, d.h. es gibt eine Teilmenge $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$, so dass gilt:

  Trichotomie: Für alle $a \in \mathbb{R}$ trifft genau eine der folgenden Eigenschaften zu:

$$a > 0, \quad -a > 0, \quad \text{oder} \quad a = 0.$$

  Abgeschlossenheit bezüglich der Addition und Multiplikation

$$a, b \in \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad a + b \in \mathbb{R}_+ \quad \text{und} \quad a \cdot b \in \mathbb{R}_+.$$

- Es gilt das **Archimedische Prinzip** in $\mathbb{R}$: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$.
- $\mathbb{R}$ ist vollständig, d. h. jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ besitzt einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

Aus den Körperaxiomen folgen verschiedene Rechenregeln.

Lemma 3.4.2 i) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $-(-a) = a$ und $(a^{-1})^{-1} = a$.

ii) Die Gleichung $a + x = b$ hat für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte Lösung $x = b + (-a) =: b - a$.

iii) Die Gleichung $a \cdot x = b$ hat für alle $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ die eindeutig bestimmte Lösung $x = b \cdot a^{-1} =: \frac{b}{a}$.

iv) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $(-1) \cdot a = -a$.

v) Es gilt $(-1)^2 = 1$.

vi) Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}, b \neq 0, d \neq 0$ gilt

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{b \cdot d} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}, \text{ falls } c \neq 0.$$

Beweis. i) $-(-a)$ ist per Definition das Inverse von $-a$, es gilt also $-a + (-(-a)) = 0$. Da aber auch $a + (-a) = 0$ folgt aus der Eindeutigkeit des Inversen die gewünschte Aussage.

ii) Durch Einsetzen sehen wir, dass $a + (b - a) = a - a + b = 0 + b = b$ gilt.

iii)

iv) Wir rechnen nach, dass $a + (-1)a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 + (-1))a = 0 \cdot a = 0$.

v) Aus iv) folgt, dass $(-1)(-1) = -(-1)$ und aus i) $-(-1) = 1$.

vi)

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= ab^{-1} \pm cd^{-1} = ab^{-1} \cdot 1 \pm cd^{-1} \cdot 1 \\ &= ab^{-1}dd^{-1} \pm cd^{-1}bb^{-1} = adb^{-1}d^{-1} \pm bcb^{-1}d^{-1} \\ &= (ad \pm bc)b^{-1}d^{-1} = \frac{ad \pm bc}{b \cdot d}\end{aligned}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = ab^{-1} \cdot cd^{-1} = acb^{-1}d^{-1} = ac(bd)^{-1} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ab^{-1}}{cd^{-1}} = ab^{-1} \cdot (cd^{-1})^{-1} = ab^{-1}c^{-1}(d^{-1})^{-1} = ab^{-1}c^{-1}d = ad(bc)^{-1} = \frac{ad}{bc} \quad \square$$

Als nächstes wollen wir ausgehend von der Menge $\mathbb{R}_+$ die Ordnungsrelation definieren und verschiedene Eigenschaften davon folgern.

Definition 3.4.3 Für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\begin{array}{lcl} a > b & \Leftrightarrow & a - b > 0 \\ a < b & \Leftrightarrow & b > a \\ a \geq b & \Leftrightarrow & a > b \text{ oder } a = b \\ a \leq b & \Leftrightarrow & a < b \text{ oder } a = b \end{array}$$

Lemma 3.4.4 Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, dann gilt

i) Für zwei reelle Zahlen gilt genau eine der Relationen

$$a < b, \quad a > b \quad \text{oder} \quad a = b.$$

ii) Transitivität

$$a < b \quad \text{und} \quad b < c \quad \Rightarrow \quad a < c$$

iii) Translationsinvarianz

$$a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c$$

iv) Spiegelung

$$a < b \quad \Rightarrow \quad -b < -a$$

v)

$$a < b, c > 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c$$

vi)

$$a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 > 0$$

vii)
$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad a^{-1} > 0$$

viii)
$$a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad b^{-1} > a^{-1} > 0$$

Beweis. i) Wir benutzen die Trichotomie für die reelle Zahl $a - b$.

ii) Aus $b-a > 0$ und $c-b > 0$ folgt aus der Abgeschlossenheit der Addition $(b-a)+(c-b) = c - a > 0$.

iii) Da $b - a > 0$ ist auch $(b + c) - (a + c) > 0$.

iv) Da $b - a > 0$ ist auch $(-a) - (-b) > 0$.

v) Da $b - a > 0$ und $c > 0$ ist auch ihr Produkt $c(b - a) = cb - ca > 0$ aufgrund der Abgeschlossenheit der Multiplikation.

vi) Ist $a > 0$, dann ist wegen der Abgeschlossenheit der Multiplikation $a \cdot a = a^2 > 0$. Ist $a < 0$, dann ist $-a > 0$ und somit $(-a)^2 > 0$ und daher $(-a)(-a) = (-1)a(-1)a = (-1)^2a^2 = a^2 > 0$. (s. Lemma 3.4.2 v))

vii) Wenn $a > 0$, dann ist $a^{-1} \neq 0$ und somit $(a^{-1})^2 > 0$ aufgrund von vi). Aufgrund der Abgeschlossenheit der Multiplikation folgt, dass $a(a^{-1})^2 > 0$ und somit $a(a^{-1})^2 = a^{-1} > 0$. Ist $a^{-1} > 0$, dann ist nach dem gerade gezeigten $(a^{-1})^{-1} = a > 0$.

viii) Da $a, b > 0$ ist auch ihr Produkt $ab > 0$ und somit nach vii) auch $(ab)^{-1} > 0$. Durch Multiplikation von $a > b$ mit $(ab)^{-1} > 0$ erhalten wir unter Benutzung von v) $a(ab)^{-1} > b(ab)^{-1}$ und somit $b^{-1} > a^{-1}$. □

Definition 3.4.5 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ dann definieren wir das **Maximum** und das **Minimum** dieser Zahlen durch

$$\max(a, b) := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq b \\ b & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \min(a, b) := \begin{cases} a & \text{falls } a \leq b \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

Für eine endliche Anzahl reeller Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ definieren wir rekursiv Maximum und Minimum durch

$$\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \max\big(a_1, \max(a_2, \ldots, a_n)\big).$$

Als nächstes wollen wir einige Folgerungen aus dem Archimedischen Axiom schließen. Dafür benötigen wir allerdings eine wichtige Ungleichung.

Lemma 3.4.6 (Die Bernoullische Ungleichung)
Für jede reelle Zahl $a > -1$ und für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt die **Bernoullische Ungleichung**

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Beweis. Wir beweisen diese Ungleichung per vollständiger Induktion. Für den Induktionsanfang setzen wir $n = 0$ und erhalten die wahre Aussage $(1+a)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0 \cdot a$.
Wir nehmen also an, dass die Ungleichung für ein n stimmt und zeigen dann, dass sie auch für $n+1$ richtig ist.

$$\begin{aligned}
(1+a)^{n+1} &= (1+a)(1+a)^n && \mid \text{Potenzgesetze} \\
&\geq (1+a)(1+na) && \mid \text{Induktionsvoraussetzung und } 1+a > 0 \\
&= 1 + (n+1)a + na^2 \\
&\geq 1 + (n+1)a && \mid na^2 \geq 0
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.4.7 i) Für jedes reelle $\epsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sodass $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$.

ii) Für jedes $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 1$ und für jede positive reelle Zahl $K \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sodass $b^n > K$.

iii) Für jedes $b \in \mathbb{R}$ mit $0 < b < 1$ und für jede positive reelle Zahl $\epsilon \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sodass $b^n < \epsilon$.

Beweis. i) Nach dem Archimedischen Prinzip gibt es zur reellen Zahl $\frac{1}{\epsilon}$ eine natürliche Zahl, sodass $n > \frac{1}{\epsilon}$ gilt. Daraus folgt nun mit Lemma 3.4.4viii), dass $\epsilon > \frac{1}{n} > 0$ gilt.

ii) Wir benutzen die Bernoullische Ungleichung mit $a = b - 1 > 0$ und erhalten $b^n = (1+a)^n \geq 1 + na$. Nach dem Archimedischen Prinzip gibt es zur reellen Zahl $\frac{K-1}{a}$ eine natürliche Zahl n, sodass $n > \frac{K-1}{a}$. Für dieses n gilt nun

$$b^n \geq 1 + na > 1 + \frac{K-1}{a} a = 1 + K - 1 = K.$$

iii) Da $0 < b < 1$ ist $\frac{1}{b} > 1$ und aus Teil ii) folgt die Existenz einer natürlicher Zahl n, für die $\left(\frac{1}{b}\right)^n > K = \frac{1}{\epsilon}$. Dies ist gleichbedeutend mit $b^n < \epsilon$ (s. Lemma 3.4.4viii)). □

Korollar 3.4.8 Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Folgengliedern

i) $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge,

ii) $a_n = b^n$ für ein reelles $b > 1$ ist strikt divergent,

iii) $a_n = b^n$ für ein reelles $0 < b < 1$ ist eine Nullfolge.

Definition 3.4.9 Sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, dann gibt es eindeutig bestimmte ganze Zahlen $n, m \in \mathbb{Z}$ mit den Eigenschaften

$$n \leq a < n+1 \quad \text{und} \quad m-1 < a \leq m.$$

Wir bezeichnen mit $\lfloor a \rfloor := n$ oder auch $[a] := n$. Diese Funktion heißt **Gaußklammer** oder Abrundungsfunktion (engl. *floor*).
Wir bezeichnen mit $\lceil a \rceil := m$ die Aufrundungsfunktion (engl. *ceil*).

Lemma 3.4.10 Für jede positive reelle Zahl $a \in \mathbb{R}_+$ und für jede natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ existiert eine eindeutig bestimmte "k-te Wurzel aus a", die wir mit $\sqrt[k]{a}$ bezeichnen, das heißt es gibt ein $x \in \mathbb{R}_+$, das Lösung der Gleichung $x^k = a$ ist.

Beweis.

- Zunächst zeigen wir die Eindeutigkeit von k-ten Wurzeln. Angenommen $x_1, x_2 > 0$ sind zwei verschiedene k-te Wurzeln von a, das heißt $x_1^k = a = x_2^k$, dann gilt
$$0 = x_1^k - x_2^k = (x_1 - x_2)(x_1^{k-1} + x_1^{k-2}x_2 + \cdots + x_1 x_2^{k-1} + x_2^{k-1}).$$
Da der zweite Faktor positiv ist, kann die Gleichung nur dann stimmen, wenn $x_1 - x_2 = 0$ ist, woraus die Eindeutigkeit $x_1 = x_2$ folgt.

- Sei $a = 1$, dann ist $\sqrt[k]{1} := 1$, da $1^k = 1$.

- Sei jetzt $0 < a < 1$, dann konstruieren wir Folge von Intervallen I_n, sodass folgendes gilt:
$$I_n = [a_n, b_n], \quad a_n^k \leq a \leq b_n^k \quad \text{und} \quad |b_n - a_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |b_1 - a_1|. \tag{3.7}$$
Wir setzen $I_1 = [a_1, b_1] = [0, 1]$ und sehen, dass die Eigenschaften (3.7) ausfgrund von $0^k = 0 < a < 1 = 1^k$ erfüllt sind. Sei jetzt das Intervall I_n konstruiert, dann nennen wir $x_n := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ den Mittelpunkt des Intervalls I_n und definieren nun das Intervall I_{n+1} durch
$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, x_n] & \text{falls } x_n^k \geq a, \\ [x_n, b_n] & \text{falls } x_n^k < a. \end{cases}$$
Per Konstruktion gilt nun $I_{n+1} \subset I_n$ und $a_{n+1}^k \leq a \leq b_{n+1}^k$. Außerdem ist $|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|b_n - a_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |b_1 - a_1|$. Die konstruierten Intervalle I_n bilden also eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ und somit gibt es ein $x \in \mathbb{R}$, dass in allen Intervallen liegt. Es gilt $x = \cap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ und somit $x^k \leq a \leq x^k$, das heißt $x^k = a$.

- Sei $a > 1$, dann setzen wir $a' = \frac{1}{a} < 1$. Wir definieren nun
$$\sqrt[k]{a} := \frac{1}{\sqrt[k]{a'}}$$
und rechnen nach, dass gilt $(\sqrt[k]{a})^k = \frac{1}{(\sqrt[k]{a'})^k} = \frac{1}{a'} = a$. □

Satz 3.4.11 Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Beweis. Wenn $\mathbb{R}$ abzählbar wäre, dann müsste auch die Menge $M = \{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1\}$ der Dezimalbrüche der Form $0, d_1 d_2 \dots$ abzählbar sein. Wir zeigen, dass M nicht abzählbar ist, also ist auch $\mathbb{R}$ nicht abzählbar.
Wir nehmen an M wäre abzählbar, das heißt es gibt eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$. Dann können wir alle Elemente von M in eine unendlich lange Liste schreiben

$$\begin{aligned}
f(1) &= 0, d_{11} d_{12} d_{13} d_{14} \dots \\
f(2) &= 0, d_{21} d_{22} d_{23} d_{24} \dots \\
f(3) &= 0, d_{31} d_{32} d_{33} d_{34} \dots \\
f(4) &= 0, d_{41} d_{42} d_{43} d_{44} \dots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Das dies nicht möglich ist wird als *Cantor'sches Diagonalargument* bezeichnet. Denn angenommen alle Elemente aus M stehen in der Liste, dann ist es trotzdem möglich ein Element $0, d_1 d_2 d_3 d_3 \dots$ zu konstruieren, das dort noch nicht vorkommt. Dafür wählen wir

$$d_n = \begin{cases} 2 & \text{falls } d_{nn} = 1 \\ 1 & \text{falls } d_{nn} \neq 1 \end{cases}$$

Dieses Element kommt in der Liste nicht vor, denn es unterscheidet sich an der ersten Nachkommastelle von $f(1)$, an der zweiten von $f(2)$, usw. Also war die Annahme, dass die Liste vollständig ist falsch und die Menge M ist nicht abzählbar. □

3.5. Die komplexen Zahlen

Die komplexen Zahlen wurden bereits im letzten Semester eingeführt. Wir wollen hier die wichtigsten Eigenschaften zusammenfassen und zeigen, dass $\mathbb{C}$ ebenso wie $\mathbb{R}$ vollständig ist.

Die Menge

$$\mathbb{C} := \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

der komplexen Zahlen bilden mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \\
z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)
\end{aligned}$$

einen Körper.
Die Zahl $\bar{z} := x - iy \in \mathbb{C}$ heißt die zu $z = x + iy$ komplex konjugierte Zahl. Die komplexe Konjugation ist verträglich mit der Addition und der Multiplikation in $\mathbb{C}$, d. h. für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad \text{und} \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}. \tag{3.8}$$

Zu einer Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt $x = \operatorname{Re}(z)$ Realteil von z und $y = \operatorname{Im}(z)$ Imaginärteil von z. Diese lassen sich mithilfe der komplex konjugierten Zahl ausdrücken durch

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \tag{3.9}$$

Auf den komplexen Zahlen gibt es einen Absolutbetrag, der für $z = x + iy$ durch

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.10}$$

definiert ist. Auch dieser lässt sich mithilfe der komplex konjugierten Zahl ausdrücken:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}. \tag{3.11}$$

Eine wesentliche Eigenschaft, die $\mathbb{C}$ von $\mathbb{R}$ unterscheidet ist die Lösbarkeit aller Polynomgleichungen:

Satz 3.5.1 (Fundamentalsatz der Algebra)
Jedes Polynom

$$P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + a_0 \qquad n \in \mathbb{N}, n \geq 1, a_i \in \mathbb{C}$$

besitzt eine komplexe Nullstelle $z \in \mathbb{C}$, das heißt $P(z) = 0$.

Beispiel 3.5.2 Die Gleichung $z^3 = 1$ hat 3 komplexe Lösungen, die durch

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right), \quad z_3 = -\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$$

gegeben sind. Dass z_1 eine Lösung der Gleichung ist, sieht man sofort, also kann man den Faktor $z - 1$ abspalten und erhält

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1).$$

Die Lösungen $z_{2/3}$ ergeben sich nun mithilfe der p-q-Formel als Lösung der Gleichung $z^2 + z + 1 = 0$.

Nun wollen wir Folgen komplexer Zahlen betrachten und zeigen, dass auch die Menge der komplexen Zahlen vollständig sind.

Der Begriff einer Folge wurde in Definition 3.2.1 für beliebige Körper definiert und wird daher auch für $\mathbb{C}$ benutzt. Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \in \mathbb{C}$ konvergiert nach Definition 3.2.3 genau dann gegen $z \in \mathbb{C}$, wenn es zu jeden $\epsilon > 0$ ein N_ϵ gibt, sodass für alle $n \geq N_\epsilon$ gilt:

$$|z_n - z| < \epsilon.$$

Da jede komplexe Zahl und damit auch jedes Folgenglied einen Real- und einen Imaginärteil hat, können wir die Folge in der Form

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + i(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

schreiben, wobei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen sind.

Satz 3.5.3 Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + i(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen konvergiert genau dann gegen den Grenzwert $z = x + iy \in \mathbb{C}$, wenn die reelle Folge der Realteile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bzw. der Imaginärteile $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in \mathbb{R}$, bzw. $y \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Beweis. Wir schreiben zunächst den Betrag in der Form

$$|z_n - z| = |x_n + iy_n - (x + iy)| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}. \tag{3.12}$$

Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Angenommen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen z, dass heißt es gilt $|z_n - z| < \epsilon$ für $n \geq N_\epsilon$. Dann folgt aus Gleichung (3.12), dass

$$|x_n - x| = \sqrt{(x_n - x)^2} \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = \epsilon$$

und analog $|y_n - y| < \epsilon$, woraus die Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x und von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y folgt.
Umgekehrt folgt aus der Annahme, dass $|x_n - x| < \epsilon$ und $|y_n - y| < \epsilon$ gilt, dass $|z_n - z| < 2\epsilon$ und somit aus der Konvergenz von Real- und Imaginärteil auch die Konvergenz der komplexen Folge. □

Anschaulich bedeutet die Konvergenz einer komplexen Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dass ab einem gewissen Index N_ϵ alle Folgenglieder in einem **Kreis** vom Radius ϵ um den Grenzwert z liegen.

Lemma 3.5.4 Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn die Folge der komplex konjuguerten Zahlen $(\bar{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 3.5.3, da $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + i(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn die Folge der Real- und Imaginärteile konvergieren, aber dann muss auch $(\bar{z_n})_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} - i(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren nach den Rechenregeln für Folgen. □

Satz 3.5.5 Der Körper der komplexen Zahlen ist vollständig.

Beweis. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$, dann sind der Realteil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und der Imaginärteil $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$. Dies folgt mithilfe derselben Argumentation, wie wir gezeigt haben, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen z konvergiert, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y konvergiert.
Da aber Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ haben, konvergiert $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $z = x + iy$. □

4. Konvergenz von Folgen und Reihen

Nachdem wir uns bisher auf abstraktem Niveau mit Folgen beschäftigt haben um die reellen Zahlen zu konstruieren, wollen wir in diesem Kapitel konkret gegebene Folgen betrachten und ihre Grenzwerte berechnen. Dabei werden wir einige Kriterien kennenlernen, die es erlauben zu entscheiden, ob eine Folge konvergiert.
Eine besonders wichtige Rolle werden dabei die Reihen einnehmen, die wir benötigen um unter anderem die Exponentialfunktion zu definieren.

4.1. Konvergenz von Folgen

Wir wollen hier noch einmal kurz die bisherigen Erkenntnisse, die wir über Folgen von *reellen Zahlen* bisher gewonnen haben:

- Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig (s. Prop. 3.2.5).
- Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist, da $\mathbb{R}$ vollständig ist (s. Satz 3.3.7). Dies ist nützlich um zu zeigen, dass eine Folge konvergiert, wenn es schwierig ist den Grenzwert zu bestimmen.
- Konvergente Folgen sind beschränkt (s. Lemma 3.2.15).
- Wir können konvergente Folgen addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren (sofern weder Folgenglieder noch Grenzwert des Nenners Null sind) und erhalten dadurch wieder konvergente Folgen mit den Grenzwerten (s. Prop 3.2.16)

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \qquad \text{wenn} \quad |b_n| \geq \alpha > 0.$$

Eine wichtige Methode um zu entscheiden, ob eine Folge konvergiert oder nicht, ist der Vergleich mit bekannten Folgen.

Lemma 4.1.1 Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen, wobei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Gilt für alle bis auf endlich viele Folgenglieder

$$0 \leq a_n \leq b_n, \tag{4.1}$$

dann ist auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
Ist umgekehrt

$$|a_n| \geq |b_n|$$

und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist strikt divergent, dann muss auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt divergent sein.

Beweis. Sei N der Index ab dem die Abschätzung (4.1) für alle $n \geq N$ gilt. Sei $\epsilon > 0$ gegeben, dann gibt es ein N_ϵ, sodass für alle $n \geq N_\epsilon$ gilt $|b_n| < \epsilon$. Somit gilt dann für alle $n \geq \max\{N, N_\epsilon\}$, dass $|a_n| < \epsilon$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.
Der Beweis der strikten Divergenz funktioniert analog. □

Aufgrund dieses Lemmas ist es wichtig einige Nullfolgen und strikt divergente Folgen zu kennen. Die wichtigsten Beispiele (s. Bsp. 3.2.7ii) und Korollar 3.4.8) für Nullfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad a_n = b^n, \quad \text{wobei } 0 < b < 1.$$

Beispiel für strikt divergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind

$$a_n = n \quad \text{und} \quad a_n = b^n, \quad \text{wobei } b > 1.$$

Wir wollen dies nun nutzen um weitere Folgen auf Konvergenz zu untersuchen.

Beispiel 4.1.2

- Sei $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n^k}$ eine Nullfolge, denn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ldots \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{k\text{-mal}} = \underbrace{0 \cdot \ldots \cdot 0}_{k\text{-mal}} = 0.$$

- Auf analoge Art und Weise zeigen wir, dass $\lim_{n\to\infty} n^k = \infty$ für $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$.
- Um den Grenzwert einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Form

$$a_n = \frac{c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \cdots + c_1 n + c_0}{d_\ell n^\ell + d_{\ell-1} n^{\ell-1} + \cdots + d_1 n + d_0}$$

zu berechnen, müssen wir erst einen Trick benutzen, bevor wir die Rechenregeln für Grenzwerte anwenden können, da sowohl der Zähler, als auch der Nenner strikt divergent sind.

Der Nenner ist hier ein Polynom vom Grad ℓ und hat damit höchstens ℓ reelle Nullstellen. Es gibt also einen Wert n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ der Nenner nicht null wird und die Folge wohldefiniert ist. Wir betrachten daher die Folge ab diesem Index.

Wir unterscheiden drei Situationen:

$k = \ell$: Wir klammern n^k in Zähler und Nenner aus und erhalten

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \cdots + c_1 n + c_0}{d_k n^k + d_{k-1} n^{k-1} + \cdots + d_1 n + d_0} \\ &= \frac{n^k}{n^k} \frac{c_k + c_{k-1}\frac{1}{n} + \cdots + c_1 \frac{1}{n^{k-1}} + c_0 \frac{1}{n^k}}{d_k + d_{k-1}\frac{1}{n} + \cdots + d_1 \frac{1}{n^{k-1}} + d_0 \frac{1}{n^k}} \end{aligned}$$

Nun können wir n^k kürzen und benutzen, dass $\frac{1}{n^k}$ für $k \geq 1$ eine Nullfolge ist und erhalten damit

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{c_k + c_{k-1}\frac{1}{n} + \cdots + c_1\frac{1}{n^{k-1}} + c_0\frac{1}{n^k}}{d_k + d_{k-1}\frac{1}{n} + \cdots + d_1\frac{1}{n^{k-1}} + d_0\frac{1}{n^k}} \\ &= \frac{c_k + c_{k-1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \cdots + c_1\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k-1}} + c_0\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}}{d_k + d_{k-1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \cdots + d_1\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k-1}} + d_0\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}} \\ &= \frac{c_k}{d_k}.\end{aligned}$$

$k > \ell$: Wir klammern n^ℓ in Zähler und Nenner aus und erhalten

$$a_n = \frac{c_k n^{k-\ell} + c_{k-1}n^{k-\ell-1} + \cdots + c_1\frac{1}{n^{\ell-1}} + c_0\frac{1}{n^\ell}}{d_\ell + d_{\ell-1}\frac{1}{n} + \cdots + d_1\frac{1}{n^{\ell-1}} + d_0\frac{1}{n^\ell}}$$

Der Nenner konvergiert gegen d_ℓ. Der Zähler hingegen ist strikt divergent, sodass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt divergent ist.

$k < \ell$: Wir klammern n^ℓ in Zähler und Nenner aus und erhalten

$$a_n = \frac{c_k\frac{1}{n^{\ell-k}} + c_{k-1}\frac{1}{n^{\ell-k+1}} + \cdots + c_1\frac{1}{n^{\ell-1}} + c_0\frac{1}{n^\ell}}{d_\ell + d_{\ell-1}\frac{1}{n} + \cdots + d_1\frac{1}{n^{\ell-1}} + d_0\frac{1}{n^\ell}}$$

Der Nenner konvergiert gegen d_k, der Zähler gegen null, sodass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Beispiel 4.1.3 Nun betrachten wir Beispiele von Folgen in denen Wurzelausdrucke vorkommen.

- Zunächst stellen wir fest, dass $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ und $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = \infty$. Angenommen $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ wäre beschränkt, dann gäbe es ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{n} \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber dann wäre auch $n \leq K^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zum Archimedischen Prinzip. Also ist $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ strikt divergent und unter Verwendung von Lemma 3.2.8 ist daher $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
- Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$. Es ist nicht möglich direkt die Rechengesetze für Folgen anzuwenden, da in der Klammer die Differenz zweier divergierender Folgen steht. Deshalb erweitern wir unter Benutzung der dritten binomischen Formel:

$$\begin{aligned}a_n &= \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n}\,(n+1-n)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\end{aligned}$$

und erhalten dadurch den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

- Jetzt wollen wir zeigen, dass der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt[n]{c}$ durch $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ gegeben ist, wobei $c > 0$.

  Ist $c = 1$, dann ist die Folge konstant $a_n = 1$ und hat daher auch den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

  Sei daher jetzt $c > 1$, dann ist auch $a_n = \sqrt[n]{c} \geq 1$ und wir machen den Ansatz $a_n = 1 + h_n$, wobei $h_n \geq 0$. Somit erhalten wir unter Verwendung der Bernoulli-Ungleichung (s. Lemma 3.4.6)

  $$c = (a_n)^n = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n,$$

  wodurch wir für die Hilfsfolge h_n die Abschätzung

  $$\frac{c-1}{n} \geq h_n \geq 0$$

  erhalten. Also ist $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Lemma 4.1.1 eine Nullfolge und somit folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

  Ist $0 < c < 1$, dann ist $c' = \frac{1}{c} > 1$ und somit gilt

  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c'}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c'}} = \frac{1}{1} = 1.$$

- Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Beispiel 4.1.4 Sind sowohl Zähler als auch Nenner einer Folge strikt divergent, dann müssen wir geschickt umformen und abschätzen bis wir einen Ausdruck erhalten, dessen Grenzwert bekannt ist.

- Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^{10}}{n!}$ und wollen zeigen, dass es sich um eine Nullfolge handelt.

  Wir bemerken dafür, dass für $n \geq 11$ gilt

  $$\begin{aligned}\frac{n^{10}}{n!} &= \frac{\overbrace{n\cdot\ldots\cdot n}^{\text{10-mal}}}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-9)(n-10)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \\ &\leq \frac{\overbrace{n\cdot\ldots\cdot n}^{\text{10-mal}}}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-9)(n-10)} \\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{10}{n}\right)}\end{aligned}$$

  also gilt für den Grenzwert

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\right)} = 0.$$

  Die Fakultät wächst also schneller als die Folge der zehnten Potenzen. Wir können analog beweisen, dass die Fakultät schneller als die Folge der k-ten Potenzen wächst, wobei $k \in \mathbb{N}$ eine beliebige Zahl ist.

- Nun betrachten wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{10^n}{n!}$. Für $n \geq 11$ gilt

$$\frac{10^n}{n!} = \frac{10}{n} \frac{1}{\frac{n-1}{10}\frac{n-2}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{10}{10}\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{10}} \leq \frac{10}{n}\frac{1}{\frac{10}{10}\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{10}},$$

wobei wir benutzen, dass $\frac{10}{n-k} = \frac{1}{\frac{n-k}{10}} \leq 1$, wenn $n-k \geq 10$. Somit können wir den Grenzwert berechnen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10^n}{n!} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\frac{1}{\frac{10}{10}\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{10}} = 0.$$

Die Fakultät wächst somit schneller die Folge der Potenzen von 10. Wir können auf analoge Art und Weise zeigen, dass die Fakultät schneller wächst als die Folge der Potenzen von $k \in \mathbb{R}, k > 0$.

- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n}{2^n}$ ist eine Nullfolge. Um dies zu sehen, zeigen wir mithilfe vollständiger Induktion, dass $n^2 \leq 2^n$ für $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Daraus folgt, dass

$$\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}, n \geq 4$$

woraus mithilfe von Lemma 4.1.1 die Aussage folgt.

4.2. Häufungswerte und monotone Folgen

In Abschnitt 3.2 haben wir definiert, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, wenn es ein $K \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|a_n| \leq K$ gilt.
Dies können wir etwas genauer schreiben indem wir sagen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von oben beschränkt ist, wenn es ein $K \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$a_n \leq K \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Sie ist von unten beschränkt ist, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass gilt

$$k \leq a_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Lemma 4.2.1 Eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ besitzt eine **kleinste obere Schranke**, das Supremum

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \min\{K \in \mathbb{R} \mid a_n \leq K \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

und eine **grösste untere Schranke**, das Infimum

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \max\{k \in \mathbb{R} \mid k \leq a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Wichtig ist, dass Supremum (bzw. das Infimum) nicht mit dem Maximum (bzw. Minimum) zu verwechseln. Mit $\max_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$ bezeichnen wir das größte Folgenglied, welches es allerdings nicht immer geben muss. Gibt es ein größtes Folgenglied, dann ist dies auch gleich der kleinsten oberen Schranke $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Gibt es kein größtes Folgenglied und ist die Folge nach oben beschränkt, dann gibt es trotzdem das Supremum, das in diesem Fall echt größer als alle Folgenglieder ist.

Beispiel 4.2.2 Betrachten wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$. Da $a_1 = 1$ und $\frac{1}{n} < 1$, wenn $n > 1$ ist $K = 1$ die kleinste obere Schranke. Da diese gleich einem Folgenglied ist, gilt $\sup a_n = \max a_n = 1$.
Eine untere Schranke der Folge ist durch $k = 0$ gegeben, da alle Folgenglieder positiv sind und somit $\frac{1}{n} > 0$ gilt. $k = 0$ ist aber auch die größte untere Schranke, da 0 der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Angenommen $a > 0$ wäre untere Schranke, dann setzen wir $\epsilon = a$ und finden einen Index N_ϵ sodass für alle $n \geq N_\epsilon$ gilt $|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon = a$, im Widerspruch zur Annahme, dass a eine untere Schranke ist. Also gilt $\inf a_n = 0$, aber es gibt kein Minimum dieser Folge.

Definition 4.2.3 Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungswert** einer Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder a_n gibt, mit

$$|a - a_n| < \epsilon.$$

Anders formuliert ist a genau dann ein Häufungswert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt mit Grenzwert $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Beispiel 4.2.4

- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ hat die Häufungswerte 1 und -1, da die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_k = 2k$ die konstante Folge 1 liefert, wohingegen die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_k = 2k + 1$ die konstante Folge -1 ist.
- Konvergente Folgen haben genau einen Häufungswert und zwar ihren Grenzwert.

Satz 4.2.5 (Satz von Bolzano-Weierstraß)
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt einen Häufungswert.

Eine andere Formulierung dieses Satzes lautet: Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Aufgrund der Beschränktheit der Folge gibt es ein Intervall $I_0 = [b_0, c_0]$ so dass alle Folgenglieder in diesem Intervall liegen $a_n \in I_0$. Nun konstruieren wir eine Intervallschachtelung, sodass in allen Intervallen I_n unendlich viele Folgenglieder liegen. $\square$

Definition 4.2.6 Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt einen größten und kleinsten Häufungswert, die mit $\limsup a_n$, bzw. $\liminf a_n$ bezeichnet werden.

Definition 4.2.7 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt **monoton steigend** (oder auch wachsend), bzw. **monoton fallend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+1} \geq a_n, \quad \text{bzw.} \quad a_{n+1} \leq a_n.$$

Eine Folge ist also monoton steigend, wenn wir nachweisen können, dass

$$a_{n+1} - a_n \geq 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sind alle Folgenglieder positiv, dann können wir alternativ beweisen, dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

gilt.

Beispiel 4.2.8 Wir wollen hier an einigen Beispielen den Zusammenhang zwischen den Begriffen $\max, \sup, \limsup, \lim, \liminf, \inf$ und $\min$ erklären um zu sehen, in welchen Situationen welche dieser Begriffe übereinstimmen. Grundsätzlich gilt für jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Reihenfolge der Werte

$$\max_{n\in\mathbb{N}} a_n \geq \sup_{n\to\infty} a_n \geq \limsup_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} a_n \geq \liminf_{n\to\infty} a_n \geq \inf_{n\to\infty} a_n \geq \min_{n\in\mathbb{N}} a_n,$$

wobei allerdings $\min, \max$ und $\lim$ nicht immer existieren müssen.

a) Für eine konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = a$ erhalten wir an allen Stellen Gleichheit und zwar sind alle Werte gleich a.

b) Eine konvergente Folge hat nur einen Häufungwert und zwar den Grenzwert, also gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

c) Eine monoton wachsende Folge hat ein Minimum und zwar das kleinste Folgenglied a_0. Dies ist dann auch das Infimum $\inf_{n\to\infty} a_n = \min_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_0$.

   Ist eine monoton wachsende Folge sogar streng monoton wachsend, d. h. gilt $a_{n+1} > a_n$, dann hat diese Folge kein Maximum. Das Supremum ist in dieser Situation durch den Grenzwert gegeben, dem sich die Folge nähert, ihn aber aufgrund der strengen Monotonie nie erreicht.

d) Ist die Folge streng monoton fallend, dann ist $\max_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup_{n\to\infty} a_n = a_0$. Es gibt kein Minimum, aber dafür gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\to\infty} a_n$.

e) Betrachten wir jetzt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{n} & \text{wenn } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

   Diese Folge ist eine Nullfolge, also ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = 0$. Sie ist weder monoton steigend, noch monoton fallend, hat aber eine monoton steigende Teilfolge von negativen Zahlen und monoton fallende Teilfolge von positiven Zahlen. Dadurch sehen wir, dass $\inf_{n\to\infty} a_n = \min_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_1 = -1$ das erste negative Folgenglied ist und dass $\sup_{n\to\infty} a_n = \max_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_2 = \frac{1}{2}$ das erste positive Folgenglied ist.

f) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ hat keinen Grenzwert, aber zwei konstante und somit konvergente Teilfolgen. Es gilt $\max_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ und $\min_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.

g) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \begin{cases} -\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1 + \frac{1}{n} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{wenn } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

hat die Häufungswerte 1 und -1. Die Teilfolge der ungeraden Zahlen ist monoton fallend mit Grenzwert -1, die Teilfolge der geraden Zahlen ist monoton steigend mit Grenzwert 1. Somit besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weder Maximum noch Minimum. Es gilt $\sup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ und $\inf_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.

h) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \begin{cases} -\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -1 - \frac{1}{n} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{wenn } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

hat die Häufungswerte 1 und -1. Die Teilfolge der ungeraden Zahlen ist monoton steigend mit Grenzwert -1, die Teilfolge der geraden Zahlen ist monoton fallend mit Grenzwert 1. Somit gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$. Außerdem gibt es ein Minimum und ein Maximum, dass durch $\sup_{n\to\infty} a_n = \max_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_2 = 1{,}5$ gegeben ist, bzw. $\inf_{n\to\infty} a_n = \min_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_1 = -2$.

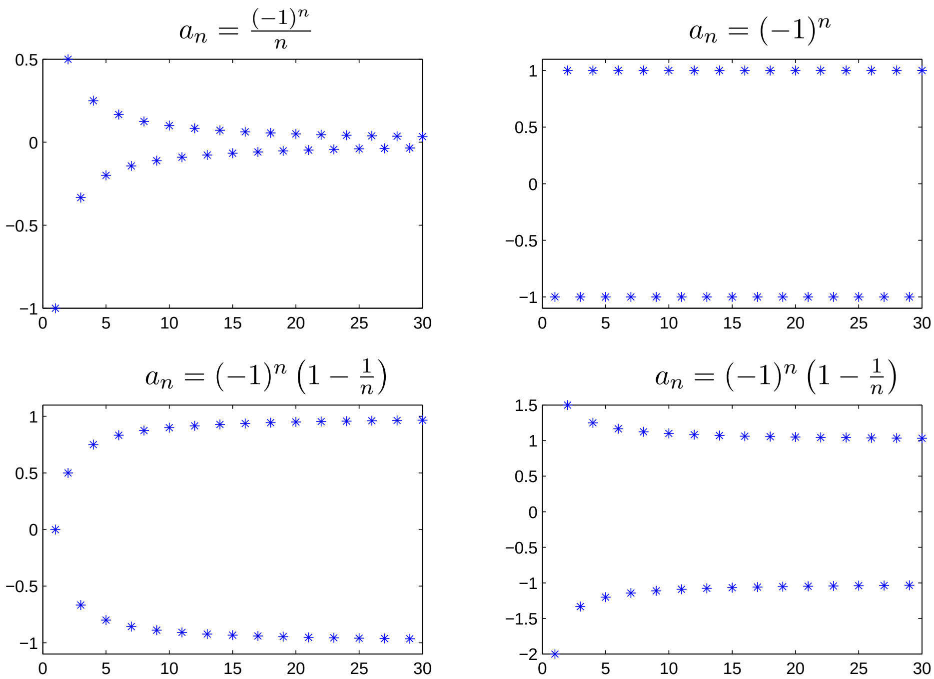

Abbildung 4.1.: Das Verhalten der Folgen e)-h) aus Beispiel 4.2.8

Satz 4.2.9 Jede beschränkte, monoton fallende oder monoton steigende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{R}$.

Beweis. Wir nehmen an, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist. Der Beweis für monoton fallende Folgen ist analog.
Aufgrund der Beschränktheit der Folge existieren sowohl $\liminf_{n\to\infty} a_n$ als auch $\limsup_{n\to\infty} a_n$ reelle Zahlen. Da die Folge monoton steigend ist, muss für alle Folgenglieder gelten $a_n \leq \liminf a_n$. Wäre dies nicht der Fall, dann könnte es nicht unendlich viele Folgenglieder geben, die beliebig nah an $\liminf_{n\to\infty} a_n$ liegen. Somit ist $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ und die Folge ist konvergent. $\square$

Dieses Kriterium ist sehr nützlich, da sowohl Beschränktheit als auch Monotonie in vielen Beispielen relativ einfach nachweisbar sind.
Allerdings wissen wir dann nur, dass die Folge konvergiert, aber wir kennen noch nicht ihren Grenzwert.

Beispiel 4.2.10 Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

definiert ist. Diese Folge ist monoton wachsend, da

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

Um die Beschränktheit der Folge zu zeigen, benutzen wir die Abschätzung $2^{n-1} < n!$, die für alle $n \geq 3$ gilt. Diese beweisen wir mit vollständiger Induktion. Für $n = 3$ sehen wir, dass $2^{3-1} = 4 < 6 = 3!$ gilt. Nun nehmen wir an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ die Formel $2^{n-1} < n!$ gilt. Dann erhalten wir

$$2^{(n+1)-1} = 2^{n-1+1} = 2^{n-1} \cdot 2 < n! \cdot 2 < n! \cdot (n+1) = (n+1)!$$

Daraus erhalten wir nun die Abschätzung für die Folgenglieder a_n

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

Aufgrund von Satz 4.2.9 konvergiert also die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir werden in Abschnitt 4.5 sehen, dass der Grenzwert dieser Folge die Eulersche Zahl e ist.

4.3. Rekursionsgleichungen

Rekursionsgleichungen treten in der Informatik zum Beispiel dann auf, wenn man die Laufzeit eines iterativen Algorithmus bestimmen will. Im Allgemeinen sind sie wichtig um diskrete Prozesse zu modellieren.
Eine andere Bezeichnung für Rekursionsgleichungen ist der Begriff Differenzengleichung.

Definition 4.3.1 Eine Rekursionsgleichung ist eine Gleichung der Form

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist.
Die Lösung einer Rekursionsgleichung ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei das erste Folgenglied, der **Anfangswert** a_0, vorgegeben ist.
Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Fixpunkt** einer Rekursionsgleichung, wenn $a = f(a)$ gilt.

Wählen wir den Fixpunkt a einer Rekursionsgleichung als Startwert $a_0 = a$, dann definiert dies die konstante Folge $a_n = a$.
Der Fixpunkt einer Rekursionsgleichung ist ein möglicher Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir werden in einem späteren Kapitel ein Kriterium kennenlernen mit dem wir das Verhalten der Lösungsfolge für Anfangswerte in der Nähe des Fixpunkts schnell untersuchen können. Hier wollen wir aber zunächst einige Beispiele betrachten um zu sehen, wie Rekursionsgleichungen untersucht werden.

Beispiel 4.3.2 Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch die Rekursionsgleichung

$$a_{n+1} = ba_n, \quad b \in \mathbb{R}$$

definiert wird. Der Fixpunkt dieser Gleichung ist $a = 0$, wenn $b \neq 1$ da dies die einzige Lösung der Gleichung $a = ba$ ist.
Für diese Vorschrift ist es möglich sie in eine Formel umzuwandeln, die explizit das n-te Folgenglied angibt. Ist das erste Folgenglied a_0 vorgegeben, dann gilt

$$a_n = a_0 b^n.$$

Dies ist per vollständiger Induktion einzusehen. Für $n = 0$ gilt die Formel, da $a_0 = a_0 b^0$. Sie sei also richtig für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_{n+1} = ba_n = b \cdot a_0 b^n = a_0 b^{n+1}$.
Das Verhalten dieser Folge hängt also im wesentlichen von b ab. Ist $0 < b < 1$, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Ist $a_0 < 0$, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nähert sich dem Fixpunkt, ist $a_0 > 0$, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallendend und nähert sich ebenfalls dem Fixpunkt.
Für $b = 1$ erhalten wir eine konstante Folge $a_n = a_0$.
Für $b > 1$ ist die Folge strikt divergent und entfernt sich vom Fixpunkt. Ist $a_0 > 0$, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und für $a_0 < 0$ ist sie monoton fallend.

Das Verhalten von Folgen, die Lösungen von Rekursionsgleichungen sind, lässt sich gut graphisch veranschaulichen. Dafür betrachten wir ein Diagramm mit den Werten a_n auf der x-Achse und a_{n+1} auf der y-Achse. Wir tragen dann die Funktion f in das Diagramm ein und die Winkelhalbierende $a_{n+1} = a_n$. Die Fixpunkte der Rekursionsgleichung sind die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit der Funktion f.
Wir tragen nun den Anfangswert a_0 auf der x-Achse ein. Um a_1 zu berechnen, müssen wir ausgehend von a_0 senkrecht nach oben bis zum Graphen von f gehen. Auf der y-Achse können wir nun a_1 ablesen. Für a_2 müssen wir nun aber wieder wissen, wo auf der x-Achse sich a_1 befindet. Dies erreichen wir indem wir waagerecht von $(a_0, f(a_0))$ zur

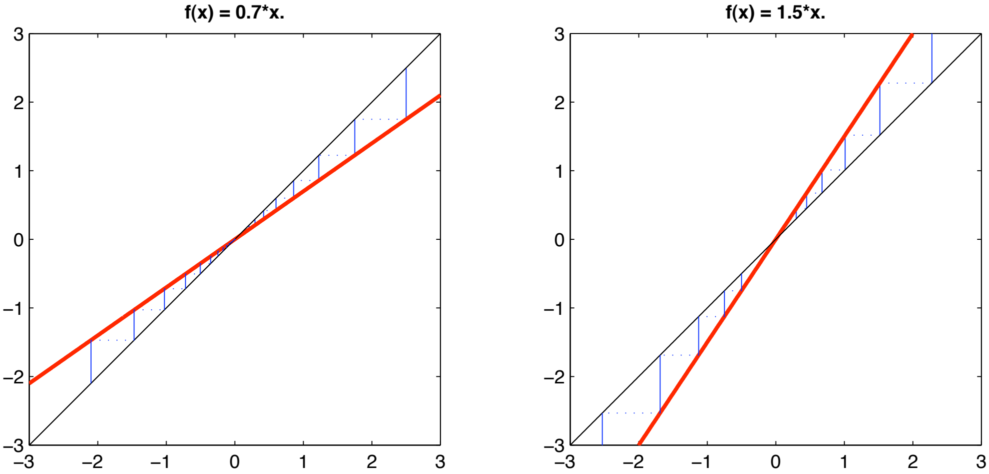

Abbildung 4.2.: Wir berechnen graphisch Lösungen der Rekursionsgleichung $a_{n+1} = 0{,}7a_n$ zu den Anfangswerten $a_0 = -2,1$ und $a_0 = 2{,}5$ (links), sowie der Rekursionsgleichung $a_{n+1} = 1{,}5a_n$ zu den Anfangswerten $a_0 = -0{,}5$ und $a_0 = 0{,}3$ (rechts). Die rote Linie ist der Funktionsgraph, die schwarze die Winkelhalbierende.
Links sind beide Lösungsfolgen Nullfolgen, die zum Anfangswert $a_0 = -2,1$ ist monoton steigend, die zum Anfangswert $a_0 = 2{,}5$ ist monoton fallend. Rechts streben beide Lösungsfolgen vom Fixpunkt $a = 0$ weg, die zum Anfangswert $a_0 = 0{,}3$ ist monoton steigend, die zum Anfangswert $a_0 = -0{,}5$ ist monoton fallend.

Winkelhalbierenden gehen, da dies der Punkt $(f(a_0), f(a_0)) = (a_1, a_1)$ ist. Nun gehen wir wieder senkrecht nach oben oder unten zum Graphen von f und erhalten so a_2, usw. (s. Abb. 4.2).

Beispiel 4.3.3 Wir wollen die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ untersuchen, die durch die Rekursionsgleichung

$$a_{n+1} = 2a_n - a_n^2, \quad a_0 = \frac{1}{2}$$

definiert ist.

i) Die Folge ist nach oben durch 1 beschränkt, d. h. $a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Für a_0 gilt diese Aussage, für alle andere $n \in \mathbb{N}$ nutzen wir, dass gilt

$$a_{n+1} = 2a_n - a_n^2 = 1 - (1 - 2a_n + a_n^2) = 1 - (1 - a_n)^2 < 1,$$

   wenn $a_n < 1$.

ii) Die Folge ist nach unten durch 0 beschränkt, d. h. $0 < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für a_0 stimmt dies. Für $n \geq 1$ zeigen wir die Aussage per Induktion. Da $a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $2 - a_n > 0$. Sei also $a_n > 0$, dann ist

$$a_{n+1} = 2a_n - a_n^2 = a_n(2 - a_n) > 0$$

als Produkt zweier positiver Zahlen.

iii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend.

Da die Folgenglieder positiv sind, genügt es zu zeigen, dass der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ist. Dies ist der Fall, da

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n(2 - a_n)}{a_n} = 2 - a_n > 2 - 1 = 1.$$

Somit ist also die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und beschränkt, daraus folgt, dass sie konvergiert (Vgl. Satz 4.2.9).

iv) Als Grenzwert der Folge kommt nur ein Fixpunkt in Frage, da aufgrund der Rechenregeln für Grenzwerte (s. Prop. 3.2.16) gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (2a_n - a_n^2) = 2a - a^2.$$

Somit ist der Grenzwert Lösung der Gleichung $a^2 - a = a(a - 1) = 0$, d.h. $a = 0$ oder $a = 1$. Aufgrund der Monotonie der Folge ist $a = 1$ der Grenzwert der Folge.

Beispiel 4.3.4 Wir betrachten als weiteres Beispiel die Rekursionsgleichung

$$a_{n+1} = \sqrt{5 + 4a_n} \tag{4.2}$$

zu verschiedenen Anfangswerten $a_0 \in \mathbb{R}$.

i) Mögliche Anfangswerte a_0 müssen so gewählt sein, dass der Ausdruck $\sqrt{5 + 4a_0}$ berechnet werden kann. Da die Wurzel nur aus positiven Zahlen gezogen werden kann, bedeutet dies, dass wir nur Anfangswerte $a_0 \geq -5/4$ wählen dürfen.

ii) Der Fixpunkt der Rekursionsgleichung und damit mögliche Grenzwert der Folge ist durch

$$a = \sqrt{5 + 4a} \quad \Rightarrow \quad a^2 - 4a - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \pm 3 \tag{4.3}$$

gegeben. Da aber $\sqrt{5 + 4(-1)} = 1$, ist nur $a = 5$ ein Fixpunkt der Gleichung (4.2).

iii) Ist $a_0 \geq -5/4$, dann ist $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, denn

$$a_{n+1} = \sqrt{5 + 4a_n} \geq 0.$$

Wir betrachten daher im folgenden die Rekursionsgleichung nur für positive Anfangswerte.

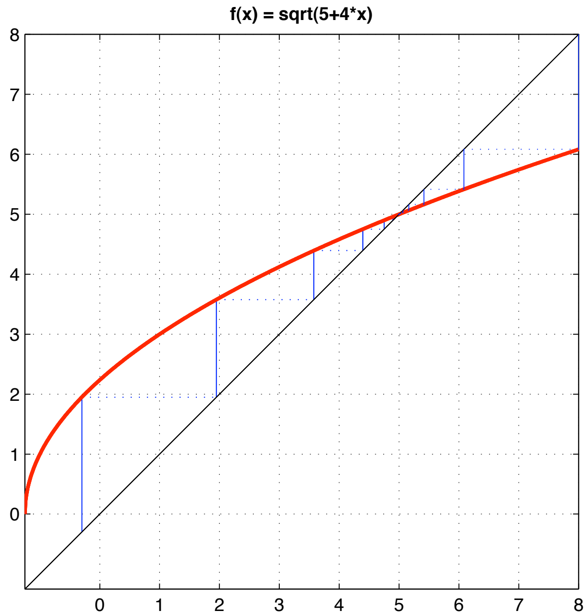

Abbildung 4.3.: Wir berechnen graphisch Lösungen der Rekursionsgleichung $a_{n+1} = \sqrt{5+4a_n}$ zu den Anfangswerten $a_0 = -0{,}3$ und $a_0 = 8$. Die rote Linie ist der Funktionsgraph, die schwarze die Winkelhalbierende. Zum negativen Anfangswert erhalten wir eine monoton steigende Folge mit Grenzwert 5, zum positiven Anfangswert erhalten wir eine monoton fallende Folge ebenfalls mit Grenzwert 5.

iv) Wir untersuchen die Folge für Anfangswerte $a_0 \geq 0$ auf Monotonie. Dafür betrachten wir die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{5+4a_n} - a_n \\ &= (\sqrt{5+4a_n} - a_n)\frac{\sqrt{5+4a_n} + a_n}{\sqrt{5+4a_n} + a_n} \\ &= \frac{5+4a_n - a_n^2}{\sqrt{5+4a_n} + a_n} \\ &= \frac{(5-a_n)(1+a_n)}{\sqrt{5+4a_n} + a_n} \end{aligned}$$

Die Nullstellen des Zählers sind genau die Lösungen der Fixpunktgleichung (4.3).

Ist $a_n \geq 0$, dann ist der Nenner positiv. Der Faktor $1 + a_n$ ist ebenfalls positiv. Das Vorzeichen hängt also davon ab, ob a_n größer oder kleiner als 5 ist.

Wir erhalten, dass $a_{n+1} < a_n$, wenn $a_n > 5$ und $a_{n+1} > a_n$, wenn $a_n < 5$.

Da aber für $a_n > 5$ gilt, dass $5 - a_{n+1} = 5 - \sqrt{5+4a_n} < 5 - \sqrt{5+4\cdot 5} = 0$, ist also für einen Anfangswert $a_0 > 5$ die Folge monoton fallend und nach unten durch 5 beschränkt.

Für $0 \leq a_n < 5$ ist $5 - a_{n+1} = 5 - \sqrt{5+4a_n} > 5 - \sqrt{5+4\cdot 5} = 0$ und daher ist die Folge für Anfangswerte $a_0 < 5$ monoton steigend und nach oben durch 5 beschränkt.

Für $a_0 = 5$ ist $a_n = 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da es der Fixpunkt ist.

In allen Fällen konvergiert die Folge gegen 5, da dies der einzige Fixpunkt und somit der einzig möglich Grenzwert ist. Siehe dazu auch Abb. 4.3.

4.4. Konvergenz von Reihen

Definition 4.4.1 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, dann definieren eine neue Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als eine Folge von **Partialsummen**

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Wir summieren also die ersten $n+1$ Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf.
Wir bezeichnen abkürzend die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und benutzen dieselbe Notation für den Grenzwert der Folge, sofern dieser existiert.

Bemerkung 4.4.2 Jede Reihe ist per Definition eine Folge. Aber auch umgekehrt ist jeder Folge eine Reihe, da

$$a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)$$

Beispiel 4.4.3 Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k$ divergiert, denn es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \to \infty \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1^k)$ divergiert, denn es gilt

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Da jede Reihe auch eine Folge ist, konvergiert sie aufgrund der Vollständigkeit in $\mathbb{R}$ genau dann wenn sie ein Cauchy-Folge ist.

Definition 4.4.4 (Das Cauchy-Kriterium für Reihen)
Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn es zu jeden $\epsilon > 0$ ein N_ϵ gibt, sodass für alle $n, m \geq N_\epsilon$ gilt:

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} \right| < \epsilon$$

Lemma 4.4.5 (Trivialkriterium)
Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Beweis. Wir bezeichnen mit $s_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ den Grenzwert der Reihe und $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ die n-te Partialsumme. Dann gilt $a_n = s_n - s_{n-1}$ und wir berechnen den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s_\infty - s_\infty = 0. \qquad \square$$

Lemma 4.4.6 Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus den entsprechenden Rechenregeln für Folgen. $\square$

Eine Methode Folgen auf Konvergenz zu untersuchen ist der Vergleich mit bekannten Folgen (s. Lemma 4.1.1). Für Reihen funktioniert das auf ähnliche Art und Weise, weshalb wir auch für Reihen einige Beispiel konvergenter und divergenter Reihen kennen sollten.

Beispiel 4.4.7 (Die geometrische Reihe)
Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ und wollen sie auf Konvergenz in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$ untersuchen. Mithilfe der geometrischen Summenformel gilt für die n-te Partialsumme unter der Vorasusetzung $x \neq 1$:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Daraus folgt, dass die geometrische Reihe für $|x| < 1$ konvergiert, denn in diesem Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1 - \lim_{n\to\infty} x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Ist $|x| > 1$, dann ist die geometrische Reihe strikt divergent.
Für $x = 1$ gilt $s_n = n$ und somit ist auch in diesem Fall die geometrische Reihe strikt divergent, wohingegen sie für $x = -1$ divergent, aber nicht strikt divergent ist (s. Bsp. 4.4.3).

Das Trivialkriterium (s. Lemma 4.4.5) liefert nur notwendiges Kriterium für Divergenz, allerdings kein hinreichendes, wie wir im nächsten Beispiel sehen.

Beispiel 4.4.8 (Die harmonische Reihe)
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, obwohl die Folge $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Wir zeigen dafür, dass für alle $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ gilt

$$|s_{2m} - s_m| = \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} = \frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{2m} > \underbrace{\frac{1}{2m} + \ldots + \frac{1}{2m}}_{m\text{-mal}} = \frac{1}{2}.$$

Mithilfe des Cauchy-Kriteriums (s. Def. 4.4.4) können wir nun die Divergenz der Reihe zeigen. Sei dafür ein $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ gegeben. Dann gibt es zu jedem Index N_ϵ ein $m > N_\epsilon$ für das $|s_{2m} - s_m| > \frac{1}{2}$ gilt. Also ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge und somit die Reihe divergent.

Die harmonische Reihe divergiert allerdings äußerst langsam. So gilt zum Beispiel

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} = 5{,}1874.., \quad \sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k} = 7{,}4855.. \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{10^6} \frac{1}{k} = 13{,}3927..$$

Betrachten wir hingegen die geometrische Reihe für $x > 1$, dann ist auf jeden Fall $\sum_{k=0}^{n} x^k > \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$. Für kleine Werte von n ist der genaue Wert nur wenig größer als diese Schranke, für größere Werte hingegen ist die Summe erheblich größer und wächst sehr schnell. Konkret gilt für $x = 1{,}001$

$$\sum_{k=0}^{100} x^k = 106{,}2208.., \quad \sum_{k=0}^{1000} x^k = 1719{,}6408.., \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{10^5} x^k = 2{,}559658 \cdot 10^{46}.$$

Die Partialsumme $\sum_{k=0}^{10^6} x^k$ kann MATLAB bereits nicht mehr berechnen.

Lemma 4.4.9 Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{R}$ mit Folgengliedern $a_k \geq 0$ ist genau dann konvergent, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.

Beweis. Aus der Bedingung $a_k \geq 0$ folgt die Monotonie der Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1} = s_{n+1}.$$

Da wir außerdem fordern, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, folgt aus Satz 4.2.9 die Konvergenz der Reihe. □

Der Betrag einer Zahl ist nicht negativ, daher ist es naheliegend Reihen von Absolutbeträgen von Folgen zu betrachten, denn auf diese kann Lemma 4.4.9 angewandt werden.

Definition 4.4.10 Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe der Absolutbeträge $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Bemerkung 4.4.11 Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent, denn es gilt aufgrund der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|.$$

Daraus folgt aber mit dem Cauchy-Kriterium die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ aus der Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$.

Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht. Wir werden in Kürze sehen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ konvergiert, während die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

Proposition 4.4.12 (Vergleichskriterien)
Seien die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ gegeben, wobei $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ und $b_k \geq 0$.

a) Es gelte für fast alle $k \in \mathbb{N}$
$$|a_k| \leq C b_k,$$
wobei $C > 0$ fest ist. Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ strikt divergent, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ebenfalls strikt divergent.

b) Wir nehmen zusätzlich an, dass $a_k, b_k \neq 0$ und es gelte für fast alle $k \in \mathbb{N}$
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}.$$
Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ strikt divergent, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ebenfalls strikt divergent.

Beweis. Wir nehmen an, dass die Abschätzungen für alle $k \in \mathbb{N}$ gelten. Dies ist möglich, da durch das Ändern von endlich vielen Folgengliedern, zwar der Grenzwert geändert wird, aber nicht die Tatsache ob eine Reihe konvergiert oder nicht.

a) Ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, dann erhalten aufgrund von $b_k \geq 0$ wir die Abschätzung
$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq C \sum_{k=0}^{n} b_k \leq C \sum_{k=0}^{\infty} b_k. \tag{4.4}$$
Also ist die Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ beschränkt. Außerdem ist sie monoton wachsend, da für die Beträge $|a_k| \geq 0$ gilt und somit ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent nach Lemma 4.4.9.

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ strikt divergent, dann ist aufgrund von (4.4) auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ strikt divergent.

b) Wir führen den Beweis von b) auf den von a) zurück, denn es gilt
$$\left|\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right| = \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \left|\frac{a_k}{b_{k+1}}\right| \leq \left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| \left|\frac{a_k}{b_{k+1}}\right| = \left|\frac{a_k}{b_k}\right| \leq \ldots \leq \left|\frac{a_0}{b_0}\right|$$
Wir setzen nun $\left|\frac{a_0}{b_0}\right| =: C$ und somit gilt $|a_{k+1}| \leq C b_{k+1}$, wodurch wir a) benutzen können. □

Korollar 4.4.13 [Quotientenkriterium] Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, wenn es ein $q \in (0,1)$ gibt, sodass für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1, \tag{4.5}$$

bzw. wenn gilt $\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$.

Gilt hingegen für fast alle $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$, dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Beweis. Wir benutzen für den Beweis das Vergleichskriterium Proposition 4.4.12b). Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für $|q| < 1$. Setzen wir also $b_k = q^k$, dann erhalten wir

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q = \left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right|.$$

Aus der Konvergenz der geometrischen Reihe folgt somit die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Ist hingegen $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$, dann folgt aus dem Vergleich mit der geometrischen Reihe die Divergenz. □

Wir wollen hier noch erklären, warum die Forderung, dass (4.5) für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, gleichbedeutend mit $\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ ist. Der Limes superior ist der größte Häufungswert der Folge $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$. Ist dieser gleich einem $q < 1$, dann können wir ein $\epsilon > 0$ wählen, sodass $q+\epsilon < 1$ ist, zum Beispiel $\epsilon = (1-q)/2$. Aus der Definition des Häufungswert folgt nun, dass es unendlich Folgenglieder gibt, für die $\left|\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| - q\right| < \epsilon$ ist. Insbesondere kann es höchstens endlich viele Werte geben für die $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > q + \epsilon$, da sonst q nicht der größte Häufungswert wäre.

Korollar 4.4.14 (Wurzelkriterium)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, wenn es ein $q \in (0,1)$ gibt, sodass für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1, \tag{4.6}$$

bzw. wenn gilt $\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} < 1$.
Gilt hingegen für fast alle $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$, dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Beweis. Es gilt aufgrund von Forderung (4.6) $|a_k| \leq q^k$ und somit folgt aus Proposition 4.4.12a) die Aussage durch den Vergleich mit der geometrischen Reihe.
Ist hingegen $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$, dann folgt aus dem Vergleich mit der geometrischen Reihe die Divergenz. □

Beispiel 4.4.15

- Wir wissen bereits, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergiert, wollen dies aber hier noch einmal mit dem Quotientenkriterium beweisen. Es gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1}$$

Also ist $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \frac{1}{2}$ für alle $k \geq 1$ und somit ist die Reihe nach dem Quotientenkriterium konvergent. Auch die Berechnung des Limes superior führt zu diesem Ergebnis, da die Folge $\left(\frac{1}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit dem Grenzwert $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1} = \limsup_{k\to\infty}\frac{1}{k+1} = 0 < 1$.

- Nun betrachten wir die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^k}$. Aufgrund der k-ten Potenz bietet sich das Wurzelkriterium an. Wir berechnen

$$\sqrt[k]{\frac{1}{k^k}} = \frac{1}{k}.$$

Somit ist $\sqrt[k]{\frac{1}{k^k}} \le \frac{1}{2}$ für $k \ge 2$ und die Reihe konvergiert nach dem Wurzelkriterium.

Wichtig für Benutzung des Quotientenkriteriums ist die Tatsache, dass es ein $q < 1$ geben muss, sodass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q$ gilt.
Können wir nur zeigen, dass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, ist aber $\limsup\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$, dann gibt es kein $q < 1$ für das $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q$ gilt. In dieser Situation ist es **NICHT** möglich mit dem Quotientenkriterium eine Aussage über die Konvergenz der Reihe zu treffen. Es gibt sowohl konvergente als auch divergente Reihe für die $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ gilt. Dieselbe Aussage gilt analog für das Wurzelkriterium.

Beispiel 4.4.16 Für die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ erhalten wir zwar

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{k}} < 1.$$

Allerdings gilt $\limsup\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$. Wir können also das Quotientenkriterium nicht benutzen. In Beispiel 4.4.8 haben wir gesehen, dass diese Reihe divergiert.

Beispiel 4.4.17 Jetzt wollen wir die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ zeigen. Diese Reihe konvergiert, allerdings können wir weder Wurzel- noch Quotientenkriterium dafür benutzen, denn es gilt

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^2.$$

Es ist zwar $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ für alle k, aber da

$$\limsup_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^2 = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^2 = 1$$

gibt es kein $q < 1$, sodass $\frac{a_{k+1}}{a_k} < q$ gilt. Das Quotientenkriterium ist also nicht anwendbar. Außerdem gilt

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}}\right)^2 = 1$$

und somit ist das Wurzelkriterium ebenfalls nicht anwendbar. Um die Konvergenz zu zeigen bemerken wir nun, dass für alle $k \geq 2$ gilt

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}.$$

Können wir also die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ beweisen, dann haben wir auch die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ bewiesen.
Um dies zu zeigen schreiben wir die Reihe in Form einer **Teleskopreihe**, das heißt einer Reihe der Form $\sum_{k=2}^{\infty}(a_i - a_{i+1})$. Dies erreichen wir durch eine Partialbruchzerlegung. Wir suchen dafür Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, sodass gilt

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k}.$$

Bilden wir nun den Hauptnenner

$$\frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} = \frac{ak + b(k-1)}{(k-1)k} = \frac{(a+b)k - b}{(k-1)k},$$

dann erhalten wir folgende Gleichungen für a und b

$$(a+b)k - b = 1 \quad \Rightarrow \quad a + b = 0 \quad \text{und} \quad -b = 1.$$

Insgesamt erhalten wir daher $a = 1$ und $b = -1$, das heißt

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Nun können wir die Partialsummen der Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ berechnen

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + 1 = 2.$$

Später werden wir diesen Grenzwert zu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}6449...$ berechnen.

Definition 4.4.18 Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **alternierend**, wenn ihre Elemente alternierende Vorzeichen haben, das heißt wenn gilt $a_{n+1}a_n \leq 0$.

Beispiel 4.4.19 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \geq 0$, dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ alternierend.

Satz 4.4.20 (Leibnizkriterium)
Eine alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn die Folge der Absolutbeträge $(|a_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist.
Für die Restglieder gilt folgende Abschätzung

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty} a_k\right| \leq |a_m| \,.$$

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $a_1 \geq 0$ ist. Dann sind alle Folgenglieder mit ungeradem Index positiv $a_{2n+1} \geq 0$ und alle Folgenglieder mit geradem Index negativ $a_{2n} \leq 0$. Da die Folge $(|a_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, gilt $|a_{2n+1}| \leq |a_{2n}| \leq |a_{2n-1}|$ und somit erhalten wir

$$a_{2n} + a_{2n+1} \leq 0 \quad \text{und} \quad a_{2n-1} + a_{2n} \geq 0.$$

Dadurch ergibt sich für die Partialsummen folgendes:

$$s_{2n+1} = a_1 + \underbrace{(a_2 + a_3)}_{\leq 0} + \underbrace{(a_4 + a_5)}_{\leq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n} + a_{2n+1})}_{\leq 0} \leq s_{2n-1} \leq \cdots \leq s_3 \leq s_1,$$
$$s_{2n} = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_3 + a_4)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n-1} + a_{2n})}_{\geq 0} \geq s_{2n-2} \geq \cdots \geq s_4 \geq s_2.$$

Außerdem ist die Differenz $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geq 0$ positiv und somit ist jede Partialsumme mit ungeradem Index größer als jede Partialsumme mit geradem Index $s_{2n+1} \geq s_{2n}$.
Wir haben daher gezeigt, dass die Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Teilfolgen hat und zwar

$(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend und von oben beschränkt, das heißt die Teilfolge hat einen Grenzwert $s_* = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$.

$(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und von unten beschränkt, das heißt die Teilfolge hat einen Grenzwert $s^* = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$.

Es gilt daher

$$s_{2n} \leq s_* \leq s^* \leq s_{2n+1}.$$

Da aber die Differenz $|s_{2n+1} - s_{2n}| = |a_{2n+1}|$ nach Voraussetzung eine Nullfolge ist, müssen auch die Grenzwerte gleich sein $s_* = s^* = \sum_{k=0}^{\infty} a_k =: s_\infty$.
Nun wollen wir noch die Restgliedabschätzung zeigen. Sei zunächst $m = 2n+1$, dann gilt

$$0 \leq s_\infty - s_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{\infty} a_k = s_\infty - s_{2n+1} + a_{2n+1} \leq a_{2n+1},$$

woraus die Abschätzung folgt. Für $m = 2n$ gilt

$$0 \geq s_\infty - s_{2n-1} = \sum_{k=2n}^{\infty} a_k = s_\infty - s_{2n} + a_{2n} \geq a_{2n}.$$

Durch Multiplikation mit -1 erhalten wir die gewünschte Abschätzung für die Beträge.□

Beispiel 4.4.21 • Die **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

konvergiert nach dem Leibnizkriterium, da $\left(\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Wir werden später sehen, dass der Grenzwert durch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log(2)$ gegeben ist.

• Die **Leibnizsche Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

konvergiert ebenfalls nach dem Leibnizkriterium und zwar gegen $\frac{\pi}{4}$.

Definition 4.4.22 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, dann heißt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ eine **Umordnung** von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Satz 4.4.23 Für eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit Grenzwert a, konvergiert auch jede Umordnung $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ gegen den Grenzwert a.

Beweis. Wir bezeichnen die Partialsummen der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ und die der Umordnung mit $s'_n = \sum_{k=0}^{n} a_{\varphi(k)}$. Wir wollen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty}(s_n - s'_n) = 0$ ist. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist, gibt es nach dem Cauchy-Kriterium ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N_\epsilon$ gilt:

$$\sum_{k=N_\epsilon+1}^{n} |a_k| < \frac{1}{2}\epsilon. \tag{4.7}$$

Wir haben dabei in der Definition des Cauchy-Kriterium $m = N_\epsilon$ gesetzt.
Jeder Summand von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ kommt auch in $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ vor, aufgrund der Bijektivität der Abbildung φ. Aus diesem Grund gibt es zu $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ ein $n' \in \mathbb{N}, n' \geq N_\epsilon$, sodass jeder Summand von $\sum_{k=0}^{N_\epsilon} a_k$ auch in $\sum_{k=0}^{n'} a_{\varphi(k)}$ vorkommt. Somit gilt für alle $m \geq n'$

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=0}^{N_\epsilon} a_k\right| = \left|\sum_{k=0,\varphi(k)>N_\epsilon}^{m} a_{\varphi(k)}\right|. \tag{4.8}$$

Außerdem gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n' \geq N_\epsilon$ ein n'' sodass die Menge $\{a_{\varphi(k)} \mid 0 \leq k \leq m, \varphi(k) > N_\epsilon\}$ in der Menge $\{a_k \mid N_\epsilon + 1 \leq k \leq n''\}$ enthalten ist. Daraus folgt, dass

$$\sum_{k=0,\varphi(k)>N_\epsilon}^{m} \left|a_{\varphi(k)}\right| \leq \sum_{k=N_\epsilon+1}^{n''} |a_k|. \tag{4.9}$$

Daraus können wir nun folgern, dass für alle $m \geq n'$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left|s'_m - s_m\right| &= \left|\sum_{k=0}^{m} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=0}^{m} a_k\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{m} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=0}^{N_\epsilon} a_k - \sum_{k=N_\epsilon+1}^{m} a_k\right| && \mid \text{Aufspalten der Summe} \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{m} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=0}^{N_\epsilon} a_k\right| + \left|\sum_{k=N_\epsilon+1}^{m} a_k\right| && \mid \text{Dreiecksungleichung} \\
&= \left|\sum_{k=0,\varphi(k)>N_\epsilon}^{m} a_{\varphi(k)}\right| + \left|\sum_{k=N_\epsilon+1}^{m} a_k\right| && \mid \text{Gleichung (4.8)} \\
&\leq \sum_{k=0,\varphi(k)>N_\epsilon}^{m} \left|a_{\varphi(k)}\right| + \sum_{k=N_\epsilon+1}^{m} |a_k| && \mid \text{Dreiecksungleichung} \\
&\leq \sum_{k=N_\epsilon+1}^{n''} |a_k| + \sum_{k=N_\epsilon+1}^{m} |a_k| && \mid \text{Gleichung (4.9)} \\
&\leq \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon && \mid \text{Gleichung (4.7), da } m, n'' \geq N_\epsilon.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $(s'_m - s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, woraus die Gleichheit der Grenzwerte von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ folgt.
Aufgrund von Gleichung (4.9) ist die Partialsummenfolge $t_n = \sum_{k=0}^{n} \left|a_{\varphi(k)}\right|$ eine Cauchy-Folge und somit konvergent. Daraus folgt, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ absolut konvergent ist. □

Dieser Satz ist nur für absolut konvergente Reihe richtig. Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, dann können Umordnungen den Grenzwert ändern und sogar dafür sorgen, dass die Reihe divergiert.

Beispiel 4.4.24 Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium, aber sie ist nicht absolut konvergent.
Wir ordnen diese Reihe jetzt auf eine Art und Weise um, die den Grenzwert verändert. Sei dafür $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Wir ordnen die Reihe so um, dass immer zwei positive Folgenglieder aufaddiert werden und dann ein negatives davon subtrahiert wird.

$$\begin{aligned}
s'_\infty = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \\
+ \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \dots .
\end{aligned}$$

Wir berechnen die n-te Partialsumme dieser Umordnung und erhalten

$$\begin{aligned}
s_n' &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k} - \frac{1}{2k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{4n} \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell} + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{2n} \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell}.
\end{aligned}$$

Somit gilt für den Grenzwert der Umordnung $s'_\infty = \lim_{n\to\infty} s'_n = s_\infty + \frac{1}{2}s_\infty = \frac{3}{2}s_\infty$.

Abschließend wollen wir begründen warum die Reihe $s'_\infty = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4\ell-3} + \frac{1}{4\ell-1} - \frac{1}{2\ell} \right)$ eine Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ist. Heuristisch können wir dies wie folgt begründen:
In der alternierenden harmonischen Reihe werden die Brüche der Form $\frac{1}{k}$ aufaddiert, wobei für einen geradzahligen Nenner ein negatives Vorzeichen erhalten. Die Menge $\{\frac{1}{2l} \mid l \in \mathbb{N}\}$ durchläuft ebenfalls alle Brüche der Form $\frac{1}{k}$ mit geradzahligem Nenner und diese kommen in s'_∞ mit negativen Vorzeichen vor. Also sind alle Summanden mit negativen Vorzeichen in beiden Summen gleich.
Die Summanden mit positiven Vorzeichen sind in der alternierenden harmonischen Reihe von der Form $\frac{1}{k}$, wobei k ungerade ist. Ungerade Zahlen lassen bei Division durch 4 entweder den Rest 1 oder den Rest 3, das heißt diese Brüche entsprechen genau der Menge $\{\frac{1}{4l-3} \mid l \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{1}{4l-1} \mid l \in \mathbb{N}\}$ und somit sind auch alle Summanden mit positivem Vorzeichen in beiden Summen gleich.

Um dies formal zu begründen betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{N}_{>0} &\to \mathbb{N}_{>0} \\
k &\mapsto \begin{cases} 4\left(\frac{k+2}{3}\right) - 3 & \text{wenn } k \equiv 1 \mod 3 \\ 4\left(\frac{k+1}{3}\right) - 1 & \text{wenn } k \equiv 2 \mod 3 \\ 2\left(\frac{k}{3}\right) & \text{wenn } k \equiv 0 \mod 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dies liefert die gewünschte Umordnung, da gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{\varphi(k)-1}}{\varphi(k)} = \sum_{\ell=1}^{3n} \left(\frac{1}{4\ell-3} + \frac{1}{4\ell-1} - \frac{1}{2\ell} \right).$$

Die Abbildung φ ist injektiv, da immer aus $\varphi(k) = \varphi(k')$ folgt, dass $k = k'$ gilt. Sie ist surjektiv, da jede gerade Zahl $2a$ dass Bild der durch 3 teilbaren Zahl $k = 3a$ ist. Eine ungerade Zahl, die den Rest 1 bei Division durch 4 lässt $4a+1$, ist das Bild von $k = 3(a+1) - 2 = 3a+1$, die den Rest 1 bei Division durch 3 lässt. Eine Zahl, die den

Rest 3 bei Division durch 4 lässt $4a + 3$, ist das Bild von $k = 3(a + 1) - 1 = 3a + 2$, die den Rest 2 bei Division durch 3 lässt.
Da jede Zahl entweder gerade ist, den Rest 1 oder den Rest 3 bei Division durch 4 lässt, wird jede natürlich Zahl durch die Abbildung φ getroffen.

Satz 4.4.25 Für zwei absolut konvergente Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist die Produktreihe (das Cauchy-Produkt) mit den Elementen

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$$

ebenfalls konvergent mit dem Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Beweis. Wir bezeichnen die Partialsummen der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, sowie die ihrer Absolutbeträge mit

$$s_n^a = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad s_n^b = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad t_n^a = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \quad t_n^b = \sum_{k=0}^{n} |b_k|.$$

Aufgrund der absoluten Konvergenz der Reihen gilt nun

$$0 \le t_n^a \le t_\infty^a \quad \text{und} \quad 0 \le t_n^b \le t_\infty^b,$$

woraus wir die Beschränktheit der Produktes der Partialsummen

$$t_n^a \cdot t_n^b = \sum_{j,k=0}^{n} |a_j||b_k| \le t_\infty^a \cdot t_\infty^b$$

erhalten und somit die Konvergenz von $(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|)$, das heißt die absolute Konvergenz von $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} b_k)$.
Wir betrachten jetzt

$$\sigma_k = \sum_{i=0}^{k} |a_i||b_{k-i}| = |a_0||b_k| + |a_1||b_{k-1}| + \cdots + |a_k||b_0|$$

und bemerken, dass die Glieder σ_k für $k = 0, \ldots, n$ im Produkt $t_n^a \cdot t_n^b = \sum_{j,k=0}^{n} |a_j||b_k|$ enthalten sind. Daraus erhalten wir die Abschätzung

$$\sum_{k=0}^{n} \sigma_k \le t_n^a \cdot t_n^b \le t_\infty^a \cdot t_\infty^b,$$

das heißt die Beschränktheit der Partialsummen $\sum_{k=0}^{n} \sigma_k$ und daher die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k$.
Mithilfe der Dreiecksungleichung gilt $|c_k| \le \sigma_k$, was die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \le \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k$$

und daher die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ und die Abschätzung $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \leq (\sum_{k=0}^{\infty} a_k) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} b_k)$ beweist. Um nun Gleichheit der Grenzwerte zu zeigen, betrachten wir

$$\left| s_n^a \cdot s_n^b - \sum_{k=0}^{n} c_k \right| = \left| \sum_{j,k=0}^{n} a_j b_k - \sum_{j,k=0,j+k\leq n}^{n} a_j b_k \right| = \left| \sum_{j,k=0,j+k>nn}^{n} a_j b_k \right| \qquad \square$$

Dieser Ausdruck strebt für $n \to \infty$ gegen null, woraus wir die Gleichheit der Grenzwerte schließen.

4.5. Die Exponentialreihe

Definition 4.5.1 Sei $x \in \mathbb{R}$, dann definieren wir die **Exponentialreihe** durch

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots .$$

Lemma 4.5.2 Die Exponentialreihe $\exp(x)$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut.

Beweis. Wir benutzen das Quotientenkriterium und bezeichen die Folgenglieder mit $a_k = \frac{x^k}{k!}$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2|x|$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{x^k} \right| = \frac{|x|}{k+1} \leq \frac{1}{2}. \qquad \square$$

Satz 4.5.3 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Beweis. Wir bilden das Cauchy-Produkt der Reihen $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ und erhalten unter Benutzung der binomischen Formel (s. Satz 2.1.11) die Glieder

$$\begin{aligned}
c_k &= \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell} = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{x^\ell}{\ell!} \frac{y^{k-\ell}}{(k-\ell)!} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} x^\ell y^{k-\ell} && \mid \text{Einfügen von } \frac{k!}{k!} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^\ell y^{k-\ell} && \mid \text{Definition Binominalkoeffizient} \\
&= \frac{1}{k!} (x+y)^k && \mid \text{binomische Formel.}
\end{aligned}$$

Somit berechnet sich das Produkt zu

$$\exp(x)\cdot\exp(y) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}c_k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+y)^k}{k!} = \exp(x+y). \qquad \square$$

Definition 4.5.4 Wir nennen $e := \exp(1)$ die **Eulersche Zahl**.

Korollar 4.5.5 i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) > 0$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,

ii) für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp(n) = e^n$.

Beweis. i) Wir bemerken zunächst, dass $\exp(0) = 1 + \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \cdots = 1$ gilt. Für $x > 0$ sind alle Glieder der Exponentialreihe $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ positiv und somit gilt $\exp(x) > 0$. Aus der Funktionalgleichung folgern wir nun

$$1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x)\exp(-x).$$

Daraus folgt zum einen $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ und zum anderen, dass $\exp(-x)$ positiv ist, da $\exp(x)$ positiv ist.

ii) Wir zeigen $\exp(n) = e^n$ für $n \in \mathbb{N}$ per Induktion. Der Induktionsanfang ist aufgrund von $\exp(0) = 1 = e^0$ erfüllt. Unter der Annahme, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ $\exp(n) = e^n$ gilt, folgern wir mit der Funktionalgleichung

$$\exp(n+1) = \exp(n)\exp(1) = e^n \cdot e = e^{n+1}.$$

Mithilfe von Punkt i) gilt dann für negative ganze Zahlen $\exp(-n) = \frac{1}{n} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$.$\square$

Die Eulersche Zahl e kann nicht nur über die Exponentialreihe definiert werden. Sie ist auch der Grenzwert der Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, d. h.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Bemerkung 4.5.6 Die Eulersche Zahl ist von großer Bedeutung für kontinuierliche Wachstumsprozesse.
Wir betrachten dazu ein Grundkapital von $K_0 = 100$. Unter der Annahme einer Verzinsung von 100% erhalten wir nach einem Jahr ein Kapital von $K = (1+1)K_0 = 200$.
Addieren wir hingegen schon nach einem halben Jahr die Hälfte Zinsen dazu und machen dies ein weiteres Mal nach einem Jahr, dann erhalten wir nach einem halben Jahr ein Kapital von $\left(1 + \frac{1}{2}\right)K_0$ und nach einem Jahr dann $K = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 K_0$. Teilen wir das Jahr in n Teile und verzinsen wir nun nach jedem n-tel des Jahres mit dem Zinssatz $100/n\%$ dann haben wir nach einem Jahr ein Kapital von $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n K_0$. Für eine kontinuierliche Verzinsung müssen wir nun den Grenzwert für $n \to \infty$ betrachten, wodurch wir die Eulersche Zahl erhalten.

Satz 4.5.7 (Restgliedabschätzung)
Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x),$$

wobei das Restglied $R_{n+1}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1 + \frac{1}{2}n$ folgender Abschätzung genügt:

$$|R_{n+1}(x)| \leq 2\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
|R_{n+1}(x)| = \left|\exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} && \mid \text{Dreiecksungleichung} \\
&= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)(n+3)} + \dots\right) && \mid \text{Ausklammern von } \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \\
&\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)^2} + \frac{|x|^3}{(n+2)^3} + \dots\right) && \mid n+2 < n+k \text{ für } k \geq 3 \\
&= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{|x|}{n+2}\right)^k
\end{aligned}$$

Wir haben also das Restglied mithilfe einer geometrischen Reihe abgeschätzt. Für $|x| \leq 1 + \frac{1}{2}n$ ist nun $\frac{|x|}{(n+2)} \leq \frac{1}{2}$, wodurch wir

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{|x|}{n+2}\right)^k \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

erhalten. □

Als nächstes wollen wir die Eulersche Zahl berechnen. Dabei benutzen wir die Restgliedabschätzung um sagen zu können wir gut die Berechnung ist.
Aufgrund von Satz 4.5.7 gilt für alle $n \geq 1$

$$R_{n+1}(1) \leq \frac{2}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n!}.$$

Wir berechnen nun die n-te Partialsumme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ rekursiv durch

$$S_0 = u_0 = 1, \quad u_n = \frac{u_{n-1}}{n} \quad \text{und} \quad S_n = S_{n-1} + u_n \quad \text{für } n > 0.$$

Wollen wir also die Eulersche Zahl e bis zu einer Genauigkeit von mindestens ϵ berechnen, also bis gilt $|S_n - e| = |R_{n+1}(1)| < \epsilon$, dann müssen wir so lange rechnen bis $u_n = \frac{1}{n!} < \epsilon$.
Wollen wir den Wert für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ berechnen, dann ist es sinnvoll x in der Form $x = N + y$ zu schreiben, wobei $N \in \mathbb{Z}$ und $y \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ist. Mithilfe der Funktionalgleichung gilt dann

$$\exp(x) = \exp(N+y) = \exp(N)\exp(y) = e^N \exp(y).$$

Die Restgliedabschätzung für $\exp(y)$ ist durch $|R_{n+1}(y)| \leq 2\frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n(n+1)!}$ gegeben. Dies wird sehr schnell sehr klein, sodass wir nach wenigen Iterationen den genauen Wert bereits sehr gut approximiert haben. Wir berechnen einige Werte

n	10	25	50	75	100
$\frac{1}{2^n(n+1)!}$	$2.4465 \cdot 10^{-11}$	$7.3898 \cdot 10^{-35}$	$5.7261 \cdot 10^{-82}$	$1.4039 \cdot 10^{-134}$	$8.3690 \cdot 10^{-191}$

Satz 4.5.8 Die Eulersche Zahl e ist irrational.

Beweis. Zunächst verfeinern wir dafür die Restgliedabschätzung aus Satz 4.5.7. Aus dem Beweis erhalten wir für $x = 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|R_{n+1}(1)| &\leq \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)^k \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} && \mid \text{geometrische Reihe} \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+1}{n} && \mid (n+2)n < (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{n!}\frac{1}{n} && \mid \text{Kürzen}
\end{aligned}$$

Wir nehmen nun an, dass $e = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}$ eine rationale Zahl ist und setzen in der Restgliedabschätzung $n = q$, dem Nenner dieser rationalen Zahl. Dann muss gelten

$$0 < \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q!}\frac{1}{q}.$$

Durch Multiplikation mit $q!$ erhalten wir daher

$$0 < p(q-1)! - \big(q! + (q-1)! + \cdots + 1\big) < \frac{1}{q}.$$

Da p und q natürliche Zahlen sind, ist der Ausdruck in der Mitte ebenfalls eine natürliche Zahl. Da es aber keine natürliche Zahl gibt, die zwischen null und dem Bruch $1/q \leq 1$ liegt, haben wir einen Wiederspruch und die Annahme e sei ein Bruch war falsch. $\square$

5. Funktionen und Stetigkeit

In Kapitel 3 haben wir uns mit den reellen Zahlen und ihren Eigenschaften beschäftigt. Dabei haben wir festgestellt, dass $\mathbb{R}$ ein vollständiger, archimedisch angeordneter Körper ist.
Als nächstes wollen wir nun Abbildungen zwischen den reellen Zahlen betrachten. Unter allen Abbildung, sind immer diejenigen am interessantesten, die wichtige Eigenschaften der untersuchten Menge erhalten.
Im letzten Semester haben wir uns mit Vektorräumen beschäftigt, also Mengen die eine Addition und eine Skalarmultiplikation besitzen (für die gewisse Regeln gelten). Wir haben dann dazu Abbildungen betrachtet, die mit diesen beiden Verknüpfungen verträglich sind. Für eine lineare Abbildung $F : V \to W$ gilt daher

$$F(v + w) = F(v) + F(w) \quad \text{und} \quad F(\lambda v) = \lambda F(v),$$

wobei $v, w \in V$ Vektoren sind und $\lambda \in K$ ein Skalar. Diese Vorschrift bedeutet, dass es egal ist ob wir erst die Vektoren v und w abbilden und dann addieren oder ob wir sie erst addieren und dann abbilden. Analog für die Skalarmultiplikation.

Für die reellen Zahlen wollen wir nun Abbildungen betrachten, die mit dem Bilden von Grenzwerten verträglich sind. Die Eigenschaft Grenzwerte von Cauchy-Folgen bilden zu können, bildet den wesentlichen Unterschied von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{Q}$, weshalb wir uns darauf konzentrieren. Wir wollen uns also mit Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschäftigen, für die gilt:

$$\text{wenn } \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{dann, gilt } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Es ist also egal, ob wir erst Grenzwert einer Folge bilden und dann diesen abbilden oder erst die einzelnen Folgenglieder abbilden und dann den Grenzwert bilden.
Diese Eigenschaft ist nützlich zum Beispiel für die Untersuchung von Rekursionsgleichungen. Wenn $a_{n+1} = f(a_n)$ ist und wir wissen, dass die dadurch definierte Folge einen Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ hat, dann muss a ein Fixpunkt der Gleichung sein, aufgrund von

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(a).$$

5.1. Teilmengen von $\mathbb{R}$

Da wir nicht nur Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, sondern auch $f : D \to \mathbb{R}$ betrachten wollen, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge ist, wollen wir hier die wichtigsten Teilmengen von $\mathbb{R}$ genauer betrachten.

Definition 5.1.1 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann bezeichnen wir die folgenden Mengen als beschränkte Intervalle mit Randpunkten a und b

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall,} \\
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \text{offenes Intervall,} \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} && \text{halboffenes Intervall,} \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} && \text{halboffenes Intervall.}
\end{aligned}$$

Außerdem gibt es die abgeschlossenen unbeschränkten Intervalle

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \quad \text{und} \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\},$$

sowie die offenen unbeschränkten Intervalle

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \quad \text{und} \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.$$

Bei einem offenen Intervall sind die Randpunkte nicht Elemente des Intervall, wohingegen sie bei einem abgeschlossenen dazugehören. Bei unbeschränkten Intervallen hängt dies nur von dem Rendpunkt des Intervalls ab, der durch eine reelle Zahl gegeben ist und nicht von dem der unendlich ist.

Bemerkung 5.1.2 Das Komplement eines offenen Intervalls ist immer ein abgeschlossenes Intervall, bzw. die Vereinigung von zwei abgeschlossenen Intervallen

$$\mathbb{R}\backslash(a, b) = (-\infty, a] \cup [b, \infty), \quad \mathbb{R}\backslash(a, \infty) = (-\infty, a], \quad \mathbb{R}\backslash(-\infty, b) = [b, \infty).$$

Umgekehrt ist das Komplement eines abgeschlossenen Intervalls ist immer ein offenes Intervall, bzw. die Vereinigung von zwei offenes Intervallen

$$\mathbb{R}\backslash[a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty), \quad \mathbb{R}\backslash[a, \infty) = (-\infty, a), \quad \mathbb{R}\backslash(-\infty, b] = (b, \infty).$$

Lemma 5.1.3 Für jedes offenen Intervall I gibt es zu jedem Punkt $x \in I$ ein $\epsilon > 0$, sodass $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq I$.

Beweis. Sei $I = (a, b)$, dann erfüllt jedes $\epsilon \leq \min\{|x - a|, |x - b|\}$ die gewünschte Eigenschaft, denn für jeden Punkt $y \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$ ist $y < x + \epsilon \leq x + |x - b| = b$ und $y > x - \epsilon \geq x - |x - a| = a$ und somit $y \in I$.
Für unbeschränkte Intervalle (a, ∞), bzw. $(-\infty, a)$ gilt die Aussage für jedes $\epsilon \leq |x - a|$.□

Bemerkung 5.1.4 Für ein abgeschlossenes Intervall ist diese Aussage falsch, da sie für die Randpunkte nicht erfüllt werden kann. Egal wie klein ϵ ist, kann das Intervall $I = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ nicht Teilmenge von $[a, b]$ sein, denn in I gibt es Punkt $x < a$, die nicht in $[a, b]$ liegen.

Lemma 5.1.5 Für jedes abgeschlossene Intervall I gilt, dass für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die $x_n \in I$ liegt, auch $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in I$.

Beweis. Sei $I = [a,b]$. Wir nehmen an, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x \notin I$ liegt, das heißt $x \in \mathbb{R}\backslash I = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$. Wir nehmen o.B.d.A. an $x \in (b,\infty)$. Da (b,∞) ein offenes Intervall ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset (b,\infty)$. Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, gibt es zu diesem ϵ ein N_ϵ, sodass für alle Folgenglieder x_n mit $n > N_\epsilon$ gilt: $|x - x_n| < \epsilon$. Aber das bedeutet, dass diese Folgenglieder in $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset \mathbb{R}\backslash I$ liegen, im Widerspruch zur Annahme, dass sie Elemente von I sind. □

Bemerkung 5.1.6 Diese Aussage ist für offene Intervalle nicht richtig. Sei zum Beispiel $I = (a,b)$, dann liegen alle Folgenglieder $x_n = a + \frac{1}{n}$ der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \geq n_0$ in I, aber der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ liegt nicht in I.

Die Eigenschaft 5.1.5 von abgeschlossenen Intervallen wird für allgemeine Teilmengen von $\mathbb{R}$ als Definition von abgeschlossen benutzt. Für uns ist im weiteren Verlauf der Vorlesung, aber nur wichtig, dass die Intervalle der Form $[a,b]$, bzw. $[a,\infty)$ und $(-\infty, b]$ abgeschlossen sind und auch Vereinigungen von Intervallen dieser Form.

Definition 5.1.7 Sei $D \subset \mathbb{R}$, den bezeichnen wir mit

$$\overline{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n \in D \text{ mit } \lim_{n\to\infty} a_n = x\}$$

den **Abschluß** von D.

Ist eine Teilmenge abgeschlossen, dann ist sie gleich ihrem Abschluß. Ist eine Menge nicht abgeschlossen, dann wird sie abgeschlossen durch die Hinzunahme von Grenzwerten.
Wir wollen jetzt in Analogie zu den entsprechenden Begriffen für Folgen definieren, was das Supremum und Infimum einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

Definition 5.1.8 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Wir sagen, dass D **nach oben** (bzw. nach unten) **beschränkt** ist, wenn es eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$x \leq K \quad (\text{bzw. } x \geq K) \qquad \text{für alle } x \in D$$

gilt.
Wir sagen, dass D **beschränkt** ist, wenn D sowohl nach oben, als auch nach unten beschränkt ist.

Definition 5.1.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ heißt **Supremum** (bzw. **Infimum**) von D, falls K die kleinste obere (bzw. die größte untere) Schranke von D ist, d. h. falls gilt

i) K ist obere Schranke (bzw. untere Schranke) und

ii) wenn K' eine obere Schranke (bzw. untere Schranke) von D ist, dann gilt $K \leq K'$ (bzw. $K \geq K'$).

Wir schreiben $\sup(D)$ für das Supremum von D und $\inf(D)$ für das Infimum von D. Ist D nicht nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, dann schreiben wir $\sup(D) = \infty$ (bzw. $\inf(D) = -\infty$).

Definition 5.1.10 Eine Menge heißt **kompakt**, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Das heißt ein Intervall ist genau dann kompakt, wenn es von der Form $[a, b]$ ist.

Satz 5.1.11 Jede nichtleere, nach oben (bzw. nach unten) beschränkte Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (bzw. ein Infimum).

Beweisidee. Sei $x_0 \in D$ und K_0 eine obere Schranke von D, dann konstruieren wir eine Intervallschachtelung $[x_n, K_n]$ für $n \in \mathbb{N}$, sodass gilt

i) $x_n \in D$,

ii) K_n ist eine obere Schranke von D

iii) $K_n - x_n \leq 2^{-n}(K_0 - x_0)$.

Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ gibt es einen Punkt x der in allen Intervallen liegt. Dieses x ist das Supremum von D. $\square$

Korollar 5.1.12 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$, sodass $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup(D)$, bzw. $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf(D)$.

Beweis. Für beschränkte Mengen folgt die Existenz dieser Folge direkt aus dem Beweis zu Satz 5.1.11. Für eine nach oben unbeschränkte Mengen D gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit $x_n \geq n$. Daraus folgt das $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} n = \infty = \sup(D)$. Analog für $\inf(D)$, wenn D nach unten unbeschränkt ist. $\square$

Beispiel 5.1.13

- Sei $D = (a, b)$ ein offenes beschränktes Intervall, dann ist $\sup(D) = b$ und $\inf(D) = a$.
- Auch für ein abgeschlossenes beschränktes Intervall $D = [a, b]$ gilt $\sup(D) = b$ und $\inf(D) = a$.
- Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $D = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dann ist $\sup(a_n) = \sup(D)$ und $\inf(a_n) = \inf(D)$. Daher gilt $\sup\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} = 1$ und $\inf\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} = 0$.

Definition 5.1.14 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, sodass $\sup(D) \in D$ (bzw. $\inf(D) \in D$), dann bezeichnen wir dieses Element als **Maximum** (bzw. **Minimum**), d.h. $\max(D) = \sup(D)$ (bzw. $\min(D) = \inf(D)$).

5.2. Funktionen

Definition 5.2.1 Sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine **reelle Funktion** auf D ist eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$. Dabei heißt D **Definitionsbereich** von f und $B = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D \text{ sodass } f(x) = y\}$ der **Bildbereich**.
Die Menge

$$G(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D\}$$

heißt **Graph** von f.

Beispiel 5.2.2 Der Graph der Funktionen i)-ix) ist in Abbildung 5.1 zu sehen.

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ heißt **konstante Funktion**.

ii) $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ heißt **Identität**.

iii) $\mathrm{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ heißt **Absolutbetrag**.

iv) $\mathrm{floor} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$ heißt **Floor-Funktion** oder **Gaußklammer**.

v) $\mathrm{sqrt} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ heißt **Quadratwurzel**.

vi) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp x$ heißt **Exponentialfunktion**.

vii) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, wobei $a_i \in \mathbb{R}$, heißt **Polynom-Funktion**.

viii) $\frac{p}{q} : D \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$, wobei $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, heißt **rationale Funktion**. Dabei ist $D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$

ix) Sei $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ eine Unterteilung des Intervall $[a, b]$. Seien außerdem $c_k \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann heißt $f : [a, b] \to \mathbb{R}, x \to c_k$ für $x \in (t_{k-1}, t_k)$ **Treppenfunktion**. Dabei wir den Punkten t_k ein beliebiger Wert, zum Beispiel c_k zugeordnet.

x)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}.$$

ist eine Funktion, deren Graph nicht gezeichnet werden kann.

Um aus bekannten Funktionen neue konstruieren zu können übertragen wir die Rechenregeln in $\mathbb{R}$ auf Funktionen.

Definition 5.2.3
- Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen, $\lambda \in \mathbb{R}$, dann definieren wir

  die **Summe** $f + g : D \to \mathbb{R}$ durch $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$,

  die **Skalarmultiplikation** $\lambda f : D \to \mathbb{R}$ durch $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$,

  das **Produkt** $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ durch $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$.

  Sei $D' = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$, dann ist der **Quotient** $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$ durch $(\frac{f}{g})(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ definiert.

- Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, $D' \subseteq D$, dann ist die **Restriktion** $f|_{D'} : D' \to \mathbb{R}$ definiert durch $f|_{D'}(x) := f(x)$.

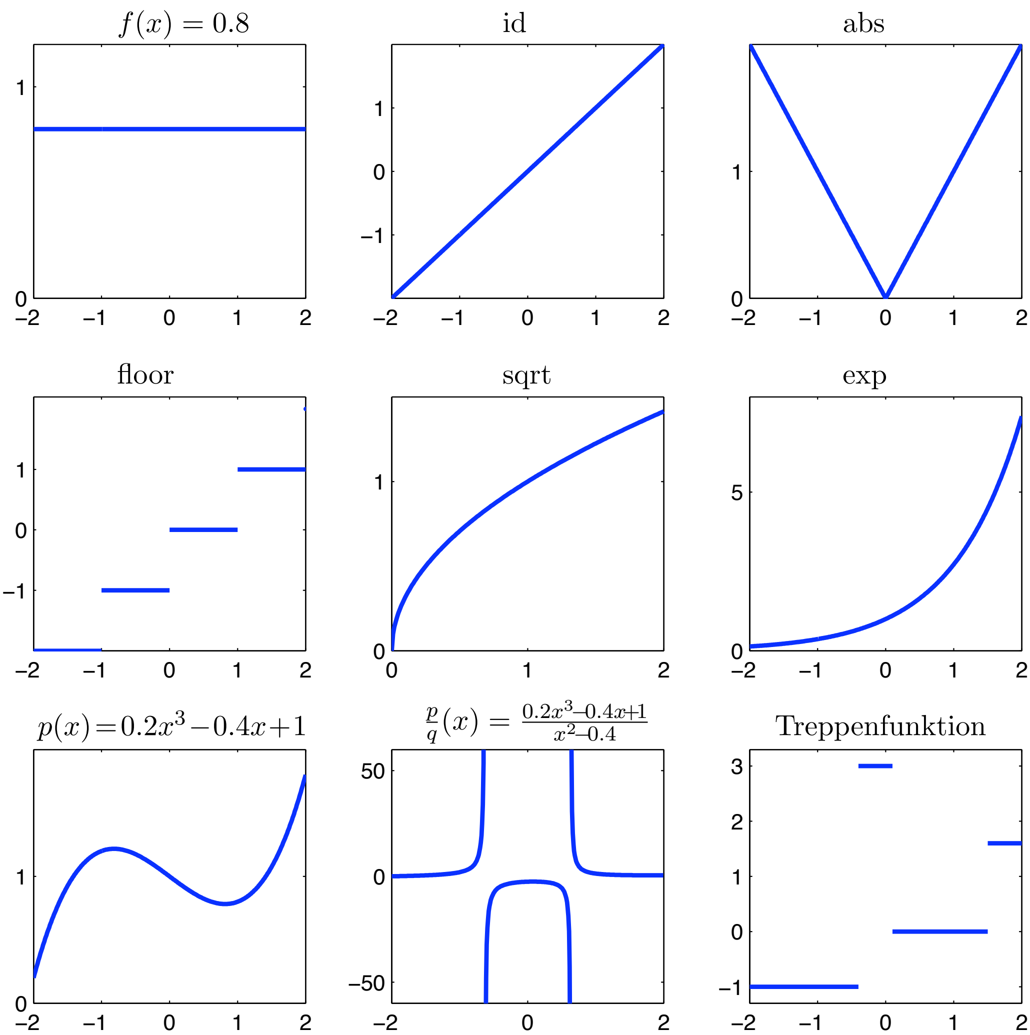

Abbildung 5.1.: Der Graph der Funktionen i)-ix) aus Beispiel 5.2.2

- Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen, sodass $f(D) \subseteq E$ gilt. Wir definieren die **Hintereinanderausführung** $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ durch $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.

Beispiel 5.2.4

- Der Absolutbetrag ist die Hintereinanderausführung der Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ und der Quadratwurzel sqrt, denn es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$(\mathrm{sqrt} \circ q)(x) = \mathrm{sqrt}(q(x)) = \mathrm{sqrt}(x^2) = |x| = \mathrm{abs}(x),$$

da $x^2 \geq 0$ und die Quadratwurzel einer positiven Zahl per Definition ebenfalls positiv ist (s. Lemma 3.4.10).

- Jede Polynomfunktion ist Summe und Produkt von konstanten Funktionen und der Identität. Rationale Funktionen sind die Quotienten von zwei Polynomfunktionen.

Als nächstes wollen wir den Begriff eines Grenzwertes von Folgen auf Funktionen übertragen.

Definition 5.2.5

i) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $a \in \overline{D}$. Wir sagen $f(x)$ konvergiert gegen c für $x \to a$ und schreiben

$$\lim_{x \to a} f(x) = c,$$

falls für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deren Folgenglieder $a_n \in D$ liegen, $a_n \neq a$ gilt und die den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ hat, der Grenzwert der Folge der Funktionswerte gegen c konvergiert $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = c$.

ii) Wir sagen $f(x)$ konvergiert von oben (bzw. von unten) gegen c für $x \to a$ und schreiben

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = c \qquad (\text{bzw.} \lim_{x \uparrow a} f(x) = c),$$

falls für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deren Folgenglieder $a_n \in D$ liegen, größer als a sind $a_n > a$ (bzw. kleiner als a sind $a_n < a$) und die den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ hat, der Grenzwert der Folge der Funktionswerte gegen c konvergiert $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = c$.

iii) Wir sagen $f(x)$ konvergiert gegen c für $x \to \infty$ (bzw. für $x \to \pm\infty$) und schreiben

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = c \qquad (\text{bzw.} \lim_{x \to -\infty} f(x) = c),$$

falls für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deren Folgenglieder $a_n \in D$ liegen, und die den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$) hat, der Grenzwert der Folge der Funktionswerte gegen c konvergiert $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = c$.

Wir bemerken, das in dieser Grenzwert auch für Punkte im Abschluss $a \in \overline{D}$, die nicht in D liegen berechnet werden kann. Für jeden Punkt $a \in \overline{D}$, gibt es Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in D$, die gegen a konvergieren (s. Def. 5.1.7). Für alle Folgenglieder kann also $f(a_n)$ berechnet werden. Ob $f(a)$ definiert ist, spielt also für den Grenzwert $\lim_{x\to a} f(x)$ keine Rolle.

Beispiel 5.2.6

- Wir zeigen, dass $\lim_{x\to 0}\exp(x) = 1$ gilt. Dafür benutzen wir die Restgliedabschätzung 4.5.7 mit $n = 0$ und erhalten, dass $|\exp(x) - 1| \leq 2\,|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1$.

  Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, dann ist $|a_n| \leq 1$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ und somit gilt $|\exp(a_n) - 1| \leq 2\,|a_n|$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt mit Lemma 4.1.1, dass $\lim_{n\to\infty} |\exp(a_n) - 1| \leq 2 \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ und somit ist $\lim_{n\to\infty} \exp(a_n) = 1$. Da dies für jede Nullfolge gilt, folgt somit aus Defintion 5.2.5 $\lim_{x\to 0}\exp(x) = 1$.

- Es gilt $\lim_{x\uparrow 1} \operatorname{floor}(x) = 0$, da für alle $x \in [0, 1)$ $\lfloor x\rfloor = 0$ ist. Da für alle $x \in [1, 2)$ gilt $\lfloor x\rfloor = 1$ ist hingegen $\lim_{x\downarrow 1} \operatorname{floor}(x) = 1$. Somit existiert $\lim_{x\to 1} \operatorname{floor}(x)$ nicht.

- Sei $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{\exp(x)-1}{x}$. Obwohl f in $x = 0$ nicht definiert ist, können wir den Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$ berechnen. Wir benutzen dafür, dass für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
|f(x) - 1| &= \left|\frac{\exp(x) - 1 - x}{x}\right| && \mid \text{Einsetzen und Hauptnenner bilden}\\
&= \frac{1}{|x|}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} - 1 - x\right)\\
&= \frac{1}{|x|}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\\
&= |x|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^{k-2}}{k!}\\
&\leq |x|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!} && \mid \text{Voraussetzung } |x| \leq 1\\
&= |x|(e-2)
\end{aligned}$$

  Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, dann gilt für alle bis auf endlich viele Folgenglieder $|a_n| \leq 1$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} |f(a_n) - 1| \leq \lim_{n\to\infty} |a_n|(e - 2) = 0.$$

  Also berechnet sich für jede Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 1$.

- Sei $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ eine Polynomfunktion, dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases}\infty & \text{wenn } n \text{ gerade}\\ -\infty & \text{wenn } n \text{ ungerade}\end{cases}$$

  Dies sieht man durch $p(x) = x^n\left(1 + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n}\right)$. Der Ausdruck in der Klammer konvergiert gegen 1 und somit hängt das Verhalten für $x \to \pm\infty$ nur von x^n ab.

5.3. Stetigkeit

Mithilfe des eben definierten Grenzwertbegriffs von Funktionen können wir nur sagen, wann eine Funktion stetig ist.

Definition 5.3.1 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Die Funktion f heißt **stetig in** a, falls

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

f heißt **stetig** in D, falls f in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist also stetig in $a \in D$, wenn für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ folgt, das die Folge der Funktionswerte $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$, also den Funktionswert des Grenzwerts.

f ist stetig in D wenn für alle in D konvergenten Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt

$$f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

Wir können also die Grenzwertbildung mit dem Berechnen des Funktionswerts vertauschen.

Für Funktionen, deren Definitionsbereich ein Intervall ist, gibt es eine anschauliche Interpretation von Stetigkeit. Für solche Funktionen ist ihr Graph eine durchgezogene Linie ohne Sprünge oder Unterbrechungen. Allerdings ist das nur auf Intervallen richtig. Ist eine Funktion für ein $a \in \mathbb{R}$ nicht definiert, dann der Graph dieser Funktion an der Definitionslücke einen Sprung haben und die Funktion ist trotzdem stetig in ihrem Definitionsbereich.

Beispiel 5.3.2

- Eine konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ ist stetig. Denn sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} c = c = f(a)$.
- Die Identität ist stetig, denn aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, folgt $\lim_{n\to\infty} \mathrm{id}(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n = a = \mathrm{id}(a)$.
- Die Exponentialfunktion ist stetig. In Beispiel 5.2.6 haben wir gesehen, dass $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1$ ist. Daraus folgt die Stetigkeit in $a = 0$, denn $\exp(0) = 1$.

  Sei nun $a \neq 0$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, dann ist $\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} \exp(a_n - a) = 1$ nach dem bereits gezeigten. Nun können wir mithilfe der Funktionalgleichung 4.5.3 die Stetigkeit in a nachweisen, denn es gilt

  $$\lim_{n\to\infty} \exp(a_n) = \lim_{n\to\infty} \exp(a_n - a + a) = \lim_{n\to\infty} \exp(a_n - a) \exp(a) = 1 \cdot \exp(a) = \exp(a).$$

- Die Funktion floor : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist unstetig in allen $a = k \in \mathbb{Z}$, denn die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \uparrow k} \mathrm{floor}(x) = k - 1$ und $\lim_{x \downarrow k} \mathrm{floor}(x) = k$ existieren zwar, aber sind unterschiedlich, sodass $\lim_{x \to k} \mathrm{floor}(x)$ nicht existiert.

In Definition 5.2.3 haben wir gesehen, wie ausgehend von bekannten Funktionen neue definiert werden können, der nächste Satz besagt, dass dabei Steigkeit erhalten bleibt.

Satz 5.3.3 Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $a \in D$ stetig sind und sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind auch die Funktionen

$$f + g : D \to \mathbb{R}, \quad \lambda f : D \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f \cdot g : D \to \mathbb{R}$$

stetig in a.

Ist $g(a) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$, wobei $D' = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$, stetig in a.

Ist $D' \subseteq D$ eine Teilmenge des Definitionsbereichs mit $a \in D'$, dann ist die Restriktion $f|_{D'} : D' \to \mathbb{R}$ stetig in a.

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Aufgrund der Stetigkeit von f und g gilt dann $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ und $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(a)$. Unter Verwendung der Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen (s. 3.2.16) gilt somit

$$\lim_{n\to\infty} (f+g)(a_n) = \lim_{n\to\infty} \big(f(a_n)+g(a_n)\big) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)+\lim_{n\to\infty} g(a_n) = f(a)+g(a) = (f+g)(a),$$

woraus die Stetigkeit von $f + g$ in a folgt. Analog gilt ebenfalls unter Verwendung von Proposition (s. 3.2.16) für das Produkt

$$\lim_{n\to\infty} (f \cdot g)(a_n) = \lim_{n\to\infty} \big(f(a_n) \cdot g(a_n)\big) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} g(a_n) = f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a),$$

die Skalarmultiplikation

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda f)(a_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda f(a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lambda f(a) = (\lambda f)(a)$$

und den Quotienten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g}(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{g(a_n)} = \frac{\lim_{n\to\infty} f(a_n)}{\lim_{n\to\infty} g(a_n)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f}{g}(a).$$

Wenn für alle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $a_n \in D$ folgt dass $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$, dann gilt dies insbesondere auch für alle Folgen mit $a_n \in D'$, woraus die Stetigkeit der Restriktion $f|_{D'}$ in a folgt. □

Korollar 5.3.4 Alle rationalen Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 5.3.3, da alle rationalen Funktionen Summen, Produkte und Quotienten der konstanten Funktionen und der Identität sind, von denen wir wissen, dass sie stetig sind. □

Beispiel 5.3.5 Der Absolutbetrag $\text{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.
Sei $a > 0$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dann gibt es einen Index n_0 so dass für alle Folgenglieder a_n mit $n \geq n_0$ gilt $a_n > 0$ und somit gilt für alle $n \geq n_0$

$$\lim_{n\to\infty} \text{abs}\, a_n = \lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} a_n = a = \text{abs}(a).$$

Sei $a < 0$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dann gibt es einen Index n_0 so dass für alle Folgenglieder a_n mit $n \geq n_0$ gilt $a_n < 0$ und somit gilt für alle $n \geq n_0$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{abs} a_n = \lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} (-a_n) = -\lim_{n\to\infty} a_n = -a = \operatorname{abs}(a).$$

Sei nun $a = 0$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, dann ist auch $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, woraus auch die Stetigkeit in 0 folgt.

Satz 5.3.6 Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) = E$. Sei f in $a \in D$ stetig und g in $b = f(a)$ stetig, dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in a stetig.

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $a_n \in D$, dann gilt aufgrund der Stetigkeit von f in a $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.
Wir setzen $b_n = f(a_n) \in E$ und haben dadurch eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} b_n = f(a) = b$ definiert. Aufgrund der Stetigkeit von g in b gilt somit $\lim_{n\to\infty} g(b_n) = g(b)$. Und somit erhalten wir insgesamt die Stetigkeit von $g \circ f$ in a, denn es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (g \circ f)(a_n) = \lim_{n\to\infty} (g(f(a_n)) = \lim_{n\to\infty} g(b_n) = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a). \qquad \square$$

Beispiel 5.3.7 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann ist auch die Funktion $|f| : D \to \mathbb{R}, x \mapsto |f(x)|$ stetig, denn es gilt $|f| = \operatorname{abs} \circ f$.

Für stetige Funktionen auf kompakten Intervallen gelten zwei Sätze, die man sich gut mithilfe des Graphen solcher Funktionen veranschaulichen kann - der Zwischenwertsatz und der Satz von Minimum und Maximum.

Satz 5.3.8 (Zwischenwertsatz)
Sei $[a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$). Dann existiert ein $p \in [a, b]$ mit $f(p) = 0$.

Beweis. Wir beweisen diese Aussage, indem wir eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ konstruieren mit den Eigenschaften:

i) $[a_n, b_n] \subseteq [a, b]$,

ii) $b_n - a_n = 2^n(b - a)$ und

iii) $f(a_n) \leq 0$, $f(b_n) \geq 0$.

Wir setzen $[a_0, b_0] := [a, b]$ und sehen, dass die Eigenschaften i)-iii) erfüllt sind.
Sei daher $[a_n, b_n]$ mit den obigen Eigenschaften konstruiert, dann setzen wir $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ und definieren

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, x_n] & \text{wenn } f(x_n) \geq 0 \\ [x_n, b_n] & \text{wenn } f(x_n) < 0. \end{cases}$$

Sei nun $p = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ der Punkt der aufgrund der Vollständigkeit (s. Satz 3.3.9) von $\mathbb{R}$ in allen Intervallen liegt. Dann ist $p = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ der Grenzwert der Folge der Intervallgrenzen.
Aufgrund der Stetigkeit von f gilt somit

$$f(p) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \quad \text{und} \quad f(p) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0.$$

Daraus folgt, dass $f(p) = 0$ sein muss. □

Der Beweis des Zwischenwertsatzes ist konstruktiv, das heißt er liefert einen Algorithmus mit dem Nullstellen berechnet werden können. Allerdings berechnet er nur eine Nullstelle, falls mehrere Nullstellen im Intervall $[a, b]$ vorhanden sind.

Beispiel 5.3.9 Sei $k \in \mathbb{N}$ und $a \in (0, 1)$ Zahlen. Dann betrachten wir die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k - a$. Es gilt $f(0) - a < 0$ und $f(1) = 1 - a > 0$, somit gibt es ein $p \in [0, 1]$ mit $f(p) = p^k - a = 0$. Also gilt für diese Zahl $p^k = a$ und $p = \sqrt[k]{a}$. Somit liefert der Zwischenwertsatz das bereits bekannte Resultat, dass es zu jeder positiven reellen Zahl eine k-te Wurzel gibt. Der Beweis dieser Asusage in Satz 3.4.10 wurde auf ähnliche Weise wie der Beweis des Zwischenwertsatzes geführt.

Bemerkung 5.3.10 Die Aussage des Zwischenwertsatzes ist nur für stetige Funktionen richtig. So gilt zum Beispiel für die Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2},$$

dass $f(-1) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$ und $f(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 0$. Aber es gibt trotzdem kein $p \in [-1, 1]$ für das $f(p) = 0$ gilt.

Auch die Forderung, dass f ein Intervall $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ als Definitionsbereich hat, ist essentiell. So ist zwar die Funktion

$$f : \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x \leq 2\} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 2$$

stetig und es gilt $f(1) = -1 < 0$ und $f(2) = 2 > 0$, aber es gibt trotzdem kein Element $p \in \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x \leq 2\} \subset \mathbb{Q}$ für dass $f(p) = 0$ gilt, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Für ein offenes Intervall ist es in der Regel nicht möglich die Werte $f(a)$ und $f(b)$ zu bestimmen, sodass der Zwischenwertsatz nur für abgeschlossenen Intervalle formuliert werden kann.

Beispiel 5.3.11 Jedes Polynom $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.
Da $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$ gilt (s. Bsp. 5.2.6), gibt es $a < b$ mit $p(a) < 0$ und $p(b) > 0$. Die Anwendung des Zwischenwertsatzes auf $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ liefert dann die Existenz von $x \in [a, b]$ mit $p(x) = 0$.

Das folgende Korollar wird oft ebenfalls als Zwischenwertsatz bezeichnet und erklärt die Bezeichnung.

Korollar 5.3.12 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei c eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$, dann gibt es ein $p \in [a, b]$ mit $f(p) = c$.

Beweis. Wir nehmen an, dass $f(a) < c < f(b)$ gilt und definieren die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = f(x) - c$. Dann ist g stetig und es gilt $g(a) < 0 < g(b)$. Somit gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $p \in [a, b]$ mit $g(p) = f(p) - c = 0$ und dies ist gleichbedeutend mit $f(p) = c$. $\square$

Korollar 5.3.13 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist auch der Bildbereich $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

Beweis. Wir bezeichnen das Supremum und Infimum des Bildbereichs $f(I)$ mit

$$A := \inf(f(I)) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \quad \text{und} \quad B := \sup(f(I)) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Somit gilt $f(I) \subseteq [A, B]$. Wir wollen jetzt zeigen, dass umgekehrt $(A, B) \subseteq f(I)$ gilt. Sei $y \in (A, B)$, dann gibt es $a, b \in I$ mit $f(a) < y < f(b)$. Dies folgt aus der Tatsache, dass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in f(I)$ sodass $\lim_{n\to\infty} x_n = B$ gilt.
Aufgrund der Stetigkeit von f folgt aus Korollar 5.3.12 die Existenz eines $x \in I$ für das $f(x) = y$ gilt. Also ist $y \in f(I)$ und wir haben $(A, B) \subseteq f(I)$ gezeigt. Da aber außerdem $f(I) \subseteq [A, B]$ gilt, ist $f(I)$ ein offenes, halboffenes oder abgeschlossenes Intervall mit den Randpunkten A und B. $\square$

Definition 5.3.14 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **beschränkt**, wenn der Bildbereich $f(D)$ beschränkt ist, d. h. es gibt eine Zahl $M \in \mathbb{R}_+$ für die gilt:

$$|f(x)| \leq M \quad \text{für alle } x \in D.$$

Satz 5.3.15 (Satz vom Minimum und Maximum)
Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f beschränkt und nimmt ihr Minimum und ihr Maximum an, d. h. es gibt $p, q \in [a, b]$ sodass gilt

$$f(p) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \quad \text{und} \quad f(q) = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Beweis. Sei $A = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Es gibt aufgrund von Korollar 5.1.12 eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sodass für alle Folgenglieder $x_n \in [a, b]$ gilt und die den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ hat. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, also folgt aus dem Satz von Bolzano-Weierstrass (s. Satz 4.2.5) die Existenz einer konvergenten Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei $p = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ der Grenzwert dieser Teilfolge. Da alle Folgenglieder $x_{n_k} \in [a, b]$ dem

abgeschlossenen Intervall liegen, muss auch der Grenzwert $p \in [a, b]$ liegen (s. Lemma 5.1.5).
Aufgrund der Stetigkeit von f gilt somit $f(p) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})$. Da eine Teilfolge einer konvergenten Folge denselben Grenzwert wie die Ausgangsfolge hat, erhalten wir daraus $f(p) = A$ das Supremum von $f([a, b])$. Also liegt $A \in \mathbb{R}$ woraus die Beschränktheit von oben von f folgt. Außerdem liegt $A \in f([a, b])$ und somit nimmt die Funktion ihr Maximum an.
Durch Anwenden derselben Argumentation auf $-f$ erhalten wir die Beschränktheit von unten und die Existenz eines Minimums. □

Bemerkung 5.3.16 Für den Satz von der Existenz eines Minimums und Maximums ist die Voraussetzung, dass der Definitionsbereich ein kompaktes Intervall ist, essentiell. Die Funktion $f : (0, 1) \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ ist zwar beschränkt, nimmt aber weder Minimum, noch Maximum an. Ihr Bildbereich ist das offene Intervall $(0, 1)$, das zwar das Supremum $\sup(0, 1) = 1$ hat, aber dies ist kein Maximum, da $1 \notin (0, 1)$.
Die Funktion $f : (0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ ist nach unten durch 1 beschränkt, aber nach oben ist sie unbeschränkt.

Auch die Voraussetzung der Stetigkeit ist essentiell, da zum Beispiel die Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

auf einem kompakten Intervall definiert ist, aber an $x = 0$ unstetig ist. Sie ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

Korollar 5.3.17 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion deren Definitionsbereich ein kompaktes Intervall ist, dann ist auch ihr Bild ein kompaktes Intervall.

Beweis. Aufgrund von Korollar 5.3.13 ist der Bildbereich ein Intervall. Da der Definitionsbereich ein kompaktes Intervall ist, nimmt f ihr Minimum und Maximum an und somit sind die Randpunkte des Intervalls auch im Bildbereich enthalten. □

In Definition 5.3.1 haben wir die Stetigkeit einer Funktion mithilfe von Folgen definiert. Dies wollen wir ab sofort als **Folgenstetigkeit** bezeichnen. Der nächste Satz zeigt, dass dies gleichbedeutend mit der sogenannten ϵ-δ-Stetigkeit ist.

Satz 5.3.18 (ϵ-δ Definition der Stetigkeit)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f ist genau dann stetig in $p \in D$, wenn gilt: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(p)| < \epsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$.

Beweis.
- "Die ϵ-δ-Stetigkeit impliziert die Folgenstetigkeit":
  Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben, dann gibt es aufgrund der ϵ-δ-Stetigkeit ein $\delta > 0$, sodass aus $|x - p| < \delta$ folgt, dass $|f(x) - f(p)| < \epsilon$ ist, sofern $x \in D$.
  Wir nehmen an, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge ist mit $x_n \in D$ sodass $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ gilt. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt $|x_n - p| < \delta$. Somit gilt

aufgrund der ϵ-δ-Stetigkeit für alle $n \geq N$ auch $|f(x_n) - f(p)| < \epsilon$. Da das ϵ beliebig war, folgt daraus die Konvergenz der Folge der Funktionswerte gegen $f(p)$, d.h $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$ und somit die Folgenstetigkeit.

- "Die Folgenstetigkeit impliziert die ϵ-δ-Stetigkeit":
  Wir beweisen diese Aussage per Widerspruch, das heißt wir nehmen, dass f in $p \in D$ folgenstetig ist, aber nicht ϵ-δ-stetig.

  Wir nehmen an, dass ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass es für alle $\delta > 0$ ein $x \in D$ gibt, für dass $|x - p| < \delta$, aber $|f(x) - f(p)| > \epsilon$ gilt.
  Da δ beliebig klein sein kann, gibt es somit zu jedem $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ ein $x_n \in D$ für das $|x_n - p| < \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - f(p)| > \epsilon$ gilt. Somit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, aber es gilt nicht $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$. Dies ist ein Widerspruch zur Folgenstetigkeit und somit war die Annahme falsch. □

Korollar 5.3.19 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $p \in D$ und $f(p) \neq 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$.

Beweis. Wir setzen $\epsilon := |f(p)| > 0$, dann gibt es ein $\delta > 0$ sodass $|f(x) - f(p)| < \epsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$.
Daraus können wir nun folgern, dass für diese x gilt:

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= |f(p) + f(x) - f(p)| && \mid \text{Addieren von } 0 = f(p) - f(p) \\
&\geq |f(p)| - |f(x) - f(p)| && \mid \text{strikte Dreiecksungleichung} \\
&= \epsilon - |f(x) - f(p)| && \mid \text{Definition von } \epsilon \\
&> \epsilon - \epsilon = 0.
\end{aligned}$$

□

5.4. Ein Fixpunktsatz

Definition 5.4.1 Wir sagen, dass eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ **Lipschitz-stetig** mit **Lipschitz-Konstante** $L \geq 0$ ist, wenn für alle $x, y \in D$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|\,.$$

Ist $L < 1$, dann heißt f Kontraktion und wir nennen in diesem Fall L Kontraktionskonstante.

Beispiel 5.4.2

- Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$, dann gilt

$$|f(x) - f(y)| = |(ax + b) - (ay + b)| = |ax - ay| = |a(x - y)| = |a|\,|x - y|\,.$$

  Somit ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = |a|$. Für $|a| < 1$ ist diese Funktion somit eine Kontraktion.

- Sei $r \in \mathbb{R}, r > 0$ und $f : [0,1] \to [0,1], x \mapsto rx(1-x)$, dann gilt

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |rx(1-x) - ry(1-y)| \\ &= \left|r\big(x - y - (x^2 - y^2)\big)\right| && \text{| Ausmultiplizieren} \\ &= \left|r\big(x - y - (x-y)(x+y)\big)\right| && \text{| dritte binomische Formel} \\ &= |r(x-y)(1-x-y)| && \text{| Ausklammern von } x - y \\ &= r\,|x-y|\,|1-x-y| && \text{| Rechenregeln für den Betrag.}\end{aligned} \tag{5.1}$$

  Wir haben das Intervall $[0,1]$ als Definitionsbereich der Funktion f festgelegt, daher gilt $0 \leq x, y \leq 1$, woraus $-1 \leq 1 - x - y \leq 1$ folgt. Dies bedeutet nun für den Betrag $|1-x-y| \leq 1$ und somit ist

$$|f(x) - f(y)| \leq r\,|x-y|$$

  weshalb r die Lipschitz-Konstante von f ist.

- Die Lipschitz-Konstante hängt nicht nur von der Vorschrift mit der die Funktion definiert wird ab, sondern auch vom Definitionsbereich.

  Sei daher $1/2 > \epsilon > 0$ und $r \in \mathbb{R}, r > 0$. Wir betrachten

$$g : [\epsilon, 1-\epsilon] \to [0,1], x \mapsto rx(1-x).$$

  Da nun $\epsilon \leq x, y \leq 1 - \epsilon$ gilt, folgt daraus $-1 + 2\epsilon \leq 1 - x - y \leq 1 - 2\epsilon$. Also gilt aufgrund von Rechnung (5.1)

$$|f(x) - f(y)| \leq r\,|x-y|\,|1-x-y| \leq r(1-2\epsilon)\,|x-y|\,,$$

  wodurch wir eine kleinere Lipschitz-Konstante als auf dem Definitionsbereich $[0,1]$ erhalten.

  So ist zum Beispiel für $r = 2$ die Funktion $g : [1/3, 2/3] \to \mathbb{R}$ eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $r(1-2\epsilon) = 2(1 - 2 \cdot (1/3)) = 2/3$.

Lemma 5.4.3 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion, dann ist f stetig.

Beweis. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L > 0$ und sei $x_0 \in D$ gegeben.
Für jedes $\epsilon > 0$ setzen wir $\delta = \frac{\epsilon}{L}$. Aus $|x - x_0| \leq \delta$ folgt aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L\,|x - x_0| \leq L \cdot \delta = L\frac{\epsilon}{L} = \epsilon. \qquad \square$$

Somit ist f ϵ-δ-stetig in x_0.

Lemma 5.4.4 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, deren Definitionsbereich D ein Intervall ist, sodass $f(D) \subseteq D$ gilt. Sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert als Lösung der Rekursionsgleichung $x_{n+1} = f(x_n)$ zum Anfangswert $x_0 \in D$.

Wenn der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ existiert, dann ist er ein Fixpunkt der Rekursionsgleichung, das heißt es gilt $\bar{x} = f(\bar{x})$.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass aufgrund der Forderung $f(D) \subseteq D$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wohldefiniert ist. Für $x_n \in D$, kann $f(x_n)$ berechnet werden, das dann wiederum in D liegt.
Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ der Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann gilt aufgrund der Stetigkeit von f:

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(\bar{x}).$$

Also ist $\bar{x}$ ein Fixpunkt. □

Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $f(D) \subseteq D$ wird **Selbstabbildung** genannt, da die die Menge D wieder in sich selbst abbildet.

Satz 5.4.5 (Fixpunktsatz)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Kontraktion mit Kontraktionskostante $0 \le q < 1$, deren Definitionsbereich D ein abgeschlossenes Intervall ist, sodass $f(D) \subseteq D$ gilt.
Sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Lösung der Rekursionsgleichung

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

zum Anfangswert $x_0 \in D$. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt $\bar{x}$ der Rekursionsgleichung. Es gilt die Fehlerabschätzung

$$|\bar{x} - x_n| \le \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \le \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| .$$

Beweis. Da f eine Kontraktion ist, gilt für alle $x, y \in D$ $|f(x) - f(y)| \le q |x - y|$ und somit insbesondere für alle $k \in \mathbb{N}, k \ge 1$:

$$|x_{k+1} - x_k| = |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le q |x_k - x_{k-1}| . \tag{5.2}$$

Mithilfe vollständiger Induktion folgt daraus nun, dass für alle $k \in \mathbb{N}, k \ge 0$ die Abschätzung

$$|x_{k+1} - x_k| \le q^k |x_1 - x_0| \tag{5.3}$$

gilt. Ebenso können wir aus (5.2) mit vollständiger Induktion folgern, dass für alle $n, k \ge 0$

$$|x_{k+n+1} - x_{k+n}| \le q^k |x_{n+1} - x_n| . \tag{5.4}$$

gilt.
Wir können jedes Folgenglied als Teleskopsumme

$$x_{n+1} = x_0 + \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) \tag{5.5}$$

schreiben und erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|x_{n+1}| &= x_0 + \sum_{k=0}^{n} |x_{k+1} - x_k| && \mid \text{Anwenden der Dreiecksungleichung auf Gleichung (5.5)} \\
&\leq x_0 + \sum_{k=0}^{n} q^k |x_1 - x_0| && \mid \text{Abschätzung (5.3)} \\
&= x_0 + \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} |x_1 - x_0| && \mid \text{geometrische Summenformel}
\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $0 \leq q < 1$ gilt, konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach dem Majorantenkriterium. Ihr Grenzwert ist durch die Reihe

$$\bar{x} = x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (x_{k+1} - x_k) \tag{5.6}$$

gegeben. Da wir angenommen haben, dass D ein abgeschlossenes Intervall ist, liegt $\bar{x} \in D$ (s. Lemma 5.1.5) und ist Fixpunkt von f, d. h. $\bar{x} = f(\bar{x})$ (s. Lemma 5.4.4). Dabei haben wir benutzt, dass jede Kontraktion stetig ist (s. Lemma 5.4.3).
Als nächstes zeigen wir die Eindeutigkeit des Fixpunkts. Dafür nehmen wir an es gäbe einen weiteren Fixpunkt $\tilde{x} \neq \bar{x}$. Dann betrachten wir die Differenz

$$|\bar{x} - \tilde{x}| = |f(\bar{x}) - f(\tilde{x})| \leq q\, |\bar{x} - \tilde{x}| \,.$$

Also ist $(1 - q)\, |\bar{x} - \tilde{x}| \leq 0$ und da $1 - q > 0$ ist dies nur möglich, wenn $|\bar{x} - \tilde{x}| = 0$ gilt und somit sind beide Fixpunkte gleich.
Zum Schluß wollen wir noch die Fehlerabschätzung beweisen. Wir berechnen dafür die Differenz

$$\begin{aligned}
\bar{x} - x_n &= \left(x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (x_{k+1} - x_k) \right) - \left(x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \right) && \mid \text{Gleichung (5.5) und (5.6)} \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} (x_{k+1} - x_k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (x_{k+n+1} - x_{k+n}) && \mid \text{Shiften des Laufindex } k
\end{aligned}$$

Somit können wir den Abstand des n-ten Folgenglieds zum Grenzwert abschätzen und erhalten

$$\begin{aligned}
|\bar{x} - x_n| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |x_{k+n+1} - x_{k+n}| && \mid \text{Dreiecksungleichung} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k |x_{n+1} - x_n| && \mid \text{Abschätzung (5.4)} \\
&= \frac{1}{1 - q} |x_{n+1} - x_n| && \mid \text{Grenzwert der geom. Reihe} \\
&\leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| && \mid \text{Abschätzung (5.2)} \\
&\leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0| && \mid \text{Abschätzung (5.3)}
\end{aligned}$$

□

Beispiel 5.4.6 In Beispiel 5.4.2 haben wir gezeigt, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $|a| < 1$ eine Kontraktion ist. Da $D = \mathbb{R}$ ist, gilt automatisch $f(D) \subseteq D$. Somit sind die Voraussetzungen von Satz 5.4.5 erfüllt und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch

$$x_{n+1} = ax_n + b, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

definiert ist, konvergiert gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt $\bar{x} = a\bar{x} + b$ der Rekursionsgleichung.
Dieser Fixpunkt berechnet sich zu

$$\bar{x} = \begin{cases} b & \text{wenn } a = 0 \\ \frac{b}{1-a} & \text{wenn } a \neq 0. \end{cases}$$

Insbesondere ist der Fixpunkt $\bar{x} = 0$, wenn $b = 0$ und somit liefert uns der Fixpunktsatz dasselbe Ergebnis wie die Betrachtungen in Beispiel 4.3.2.

Beispiel 5.4.7 In Beispiel 4.3.3 haben wir die Rekursionsgleichung

$$x_{n+1} = 2x_n - x_n^2$$

zum Anfangswert $x_0 = \frac{1}{2}$ untersucht und gezeigt, dass die dadurch definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert.
Wir wollen jetzt diese Gleichung noch einmal mit dem Fixpunktsatz untersuchen. Dafür betrachten wir die Funktion $f : D \to \mathbb{R}, x \to 2x - x^2$ und werden zeigen, dass es Intervalle $D \subset \mathbb{R}$ mit $1 \in D$ gibt, sodass $f|_D$ eine Kontraktion ist.
Zunächst berechnen wir die Fixpunkte der Gleichung. Diese erfüllen

$$\bar{x} = 2\bar{x} - \bar{x}^2, \quad \Rightarrow \quad \bar{x}^2 - \bar{x} = 0, \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_1 = 0 \quad \text{und} \quad \bar{x}_2 = 1.$$

Da es zwei Fixpunkte gibt, können wir nicht erwarten, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ eine Kontraktion ist. Um die Lipschitz-Konstante zu berechnen gehen wir vor wie in Beispiel 5.4.2 und berechnen

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|2x - x^2 - 2y + y^2\right| \\ &= |2(x-y) - (x+y)(x-y)| \\ &= |(2-x-y)(x-y)| = |2-x-y|\,|x-y|\,. \end{aligned}$$

Die Lipschitz-Konstante hängt nun davon ab welche Werte $|2 - x - y|$ annehmen kann und dies wiederum hängt vom Definitionsbereich D der Funktion f ab.
Auf einem Intervall, das den Fixpunkt $\bar{x}_1 = 0$ enthält, kann $f : D \to \mathbb{R}$ keine Kontraktion sein. Durch Einsetzen von $x = y = 0$ erhalten wir, dass die Lipschitz-Konstante für D mindestens $|2 - 0 - 0| = 2$ sein muss.
Betrachten wir daher ein Intervall $D = [1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$, das den Fixpunkt $\bar{x}_2 = 1$ enthält. Nun gilt $1 - \epsilon \leq x, y \leq 1 + \epsilon$ und somit gilt

$$2 - 2(1+\epsilon) = -2\epsilon \leq 2 - x - y \leq 2 - 2(1-\epsilon) = 2\epsilon.$$

Wählen wir also $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$, dann ist $|2-x-y| \leq 2\epsilon < 1$ und die Funktion

$$f : [1-\epsilon, 1+\epsilon] \to \mathbb{R}, x \to 2x - x^2$$

ist eine Kontraktion. Um den Fixpunktsatz anwenden zu dürfen, müssen wir noch prüfen, ob

$$f([1-\epsilon, 1+\epsilon]) \subseteq [1-\epsilon, 1+\epsilon]$$

gilt. Dafür bemerken wir, dass der Graph von f eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen 0 und 2 ist, die bei $x = 1$ ihr Maximum hat. Da $f(1) = 1$, gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 1$. Auf dem Intervall $[1-\epsilon, 1+\epsilon]$ sind die Funktionswerte von f an den Randpunkten am kleinsten. Wir überprüfen also

$$f(1 \pm \epsilon) = 2 \pm 2\epsilon - (1 \pm 2\epsilon + \epsilon^2) = 1 - \epsilon^2 > 1 - \epsilon.$$

Somit sind alle Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt und wir folgern die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Fixpunkt $\bar{x} = 1$ für alle Anfangswerte $x_0 \in (1/2, 3/2)$.

5.5. Umkehrfunktionen und der Logarithmus

Definition 5.5.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nennen f (**streng**) **monoton wachsend**, falls für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt

$$f(x) \leq f(y) \quad (\text{bzw. } f(x) < f(y)).$$

Wir nennen f (**streng**) **monoton fallend**, falls für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt

$$f(x) \geq f(y) \quad (\text{bzw. } f(x) > f(y)).$$

Satz 5.5.2 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende (bzw. streng monoton fallende) Funktion. Dann bildet f das Intervall D bijektiv auf das Intervall $D' := f(D)$ ab und die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : D' \to \mathbb{R}$$

ist stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Beweis. Wir wissen bereits aus Korollar 5.3.13, dass das Bild eines Intervalls unter einer stetigen Funktion wieder ein Intervall ist, also ist $D' = f(D)$ ein Intervall. Durch die Einschränkung des Bildbereichs $f : D \to D'$ wird f surjektiv.
Für die Injektivität benutzen wir die strenge Monotonie der Funktion (wir nehmen an f sei streng monoton wachsend, der andere Fall ist analog.)

Sei $x_1 \neq x_2$, dann können wir annehmen, dass $x_1 < x_2$ gilt. Aufgrund der strengen Monotonie ist, dann $f(x_1) < f(x_2)$ und somit insbesondere $f(x_1) \neq f(x_2)$, also ist f injektiv.
Wir haben also gezeigt, dass $f : D \to D', x \mapsto f(x)$ eine bijektive Funktion ist. Somit ist die Funktion

$$f^{-1} : D' \to \mathbb{R}, y \mapsto f^{-1}(y) = x, \quad \text{wenn } f(x) = y.$$

wohldefiniert. Sie ist streng monoton wachsend. Um dies zu sehen sei $y_1 < y_2$ und wir nehmen an, es gelte $x_1 =: f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) := x_2$. Dann würde aber aus der Eigenschaft von f streng monoton wachsend zu sein folgen, dass $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ gilt. Dies ist ein Widerspruch zu $y_1 < y_2$.
Zuletzt zeigen wir die Stetigkeit der Umkehrfunktion f^{-1}. Wir nehmen wieder an, dass f streng monoton wachsend ist. Sei $b \in D'$ und $a = f^{-1}(b)$ das Urbild von b unter f.
Um die Stetigkeit von f^{-1} in b zu zeigen wollen wir die ϵ-δ-Stetigkeit benutzen und nehmen zunächst an, dass b kein Randpunkt des Intervalls D ist. Dann ist aufgrund der Monotonie a kein Randpunkt von D.
Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass das Intervall $[a - \epsilon, a + \epsilon]$ ganz in D enthalten ist. Da a kein Randpunkt ist, ist dies möglich (vgl. Lemma 5.1.3). Sei $b_1 := f(a - \epsilon)$ und $b_2 := f(a + \epsilon)$, dann ist $b_1 < b < b_2$ aufgrund der Monotonie und f bildet $[a - \epsilon, a + \epsilon]$ bijektiv auf $[b_1, b_2]$ ab. Sei jetzt $\delta = \min\{b - b_1, b - b_2\}$, dann gilt

$$f^{-1}\big((b - \delta, b + \delta)\big) \subseteq (a - \epsilon, a + \epsilon). \tag{5.7}$$

Dies ist aber gleichbedeutend mit der ϵ-δ-Stetigkeit von f^{-1} in b, denn die Gleichung 5.7 besagt, dass für alle $x \in (b - \delta, b + \delta)$, also $|x - b| < \delta$ das Bild $f^{-1}(x) \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ liegt, also $|f(x) - a| = |f(x) - f(b)| < \epsilon$ gilt.
Ist $b \in D'$ ein Randpunkt des Intervalls, dann ist auch $a = f^{-1}(b) \in D$ ein Randpunkt und wir erhalten dasselbe Ergebnis durch die Betrachtung von $[a - \epsilon, a]$, bzw. $[a, a + \epsilon]$. □

Bemerkung 5.5.3 Die Umkehrfunktion f^{-1} ist nicht mit der Funktion $\frac{1}{f}$ zu verwechseln.
Die Umkehrfunktion ist diejenige Funktion, die

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{D'} \quad \text{und} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D$$

erfüllt, wobei mit $\circ$ die Komposition (Hintereinanderausführung) von Funktionen gemeint ist. f^{-1} kann nur definiert werden, wenn $f : D \to D'$ bijektiv ist.
Die Funktion $\frac{1}{f}$ hingegen erfüllt

$$f \cdot \frac{1}{f} = \frac{1}{f} \cdot f = 1$$

und kann nur definiert werden, wenn $f(x) \neq 0$ für alle $x \in D$.

Satz 5.5.4 Sei $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, dann ist die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k$ streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}_{\geq 0}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ab.

Die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[k]{x}$$

ist stetig und streng monoton wachsend.

Beweis. Um die strenge Monotonie der Funktion f zu zeigen, seien $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x < y$. Dann ist der Ausdruck

$$y^k - x^k = (y - x)(y^{k-1} + y^{k-2}x + \cdots + yx^{k-2} + x^{k-1})$$

positiv, da einerseits nach Voraussetzung $y - x > 0$ ist und andererseits der zweite Faktor positiv ist als Summe und Produkt positiver reeller Zahlen. Daraus folgt $x^k < y^k$ und somit die strenge Monotonie. Die Funktion f ist stetig, da sie durch ein Monom gegeben ist (s. Satz 5.3.3). Somit können wir Satz 5.5.2 anwenden und erhalten Stetigkeit und strenge Monotonie der Umkehrfunktion. □

Satz 5.5.5 Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_{>0}$ ab.
Die Umkehrfunktion

$$\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$$

ist streng monoton wachsend und heißt **natürlicher Logarithmus**. Es gilt die Funktionalgleichung

$$\log(y_1 y_2) = \log(y_1) + \log(y_2)$$

für alle $y_1, y_2 \in \mathbb{R}_{>0}$.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist. Dafür bemerken wir, dass für ein $p > 0$ gilt $\exp(p) = 1 + p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{6} + \cdots > 1$.
Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$, dann ist $p = x_2 - x_1 > 0$. Daraus folgt nun, dass

$$\exp(x_2) = \exp(x_1 + p) = \exp(x_1)\exp(p) > \exp(x_1)$$

und somit die strenge Monotonie.
Für die Surjektivität von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ bemerken wir, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\exp(n) \geq 1 + n \quad \text{und} \quad \exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Somit ist $\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \exp(-n) = 0$ woraus aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion mit dem Zwischenwertsatz (s. Korollar 5.3.12) folgt, dass das Bild von exp durch $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$ gegeben ist.
Wir können daher Satz 5.5.2 anwenden und erhalten Stetigkeit und strenge Monotonie des Logarithmus.

Zum Schluss beweisen wir die Funktionalgleichung des Logarithmus. Seien $y_1, y_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, dann setzen wir $x_1 = \log(y_1)$ und $x_2 = \log(y_2)$. Dies ist gleichbedeutend mit $\exp(x_1) = y_1$

und $\exp(x_2) = y_2$. Somit gilt:

$$\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2) = y_1 y_2.$$

Durch Anwenden des Logarithmus auf diese Gleichung erhalten wir

$$\log(y_1 y_2) = \log(\exp(x_1 + x_2)) = x_1 + x_2 = \log(y_1) + \log(y_2). \qquad \square$$

Korollar 5.5.6 Für alle $y_1, y_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$\log\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \log(y_1) - \log(y_2).$$

Insbesondere ist $\log\left(\frac{1}{y_2}\right) = -\log(y_2)$.

Beweis. Es gilt aufgrund der Funktionalgleichung des Logarithmus

$$\log(y_1) = \log\left(y_2 \frac{y_1}{y_2}\right) = \log(y_2) + \log\left(\frac{y_1}{y_2}\right).$$

Somit erhalten wir die Aussage durch Subtraktion von $\log(y_2)$.
Da $\log(1) = \log(\exp(0)) = 0$ ist, folgt der zweite Teil der Aussage. $\square$

Mithilfe des Logarithmus und der Exponentialfunktion können wir nun allgemeine Potenzen a^x für positive a und beliebige Exponenten $x \in \mathbb{R}$ definieren. Bisher ist das nur mit Exponenten $x \in \mathbb{Q}$ möglich.
Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $a^1 = a$ und dann induktiv $a^n := a^{n-1}$. Für negative Exponenten $-n \in \mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}$ können wir durch $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ Potenzen definieren.
Sei nun $q \in \mathbb{N}, q \geq 2$, dann schreiben wir $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$ und setzen $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.
Eine Möglichkeit a^x zu definieren bestünde nun darin eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $x_n \in \mathbb{Q}$ zu benutzen und $a^x := \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$ zu definieren. Allerdings ist es dann notwendig zu beweisen, dass dieser Grenzwert existiert.

Definition 5.5.7 Sei $a > 0$. Wir definieren die Funktion

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp_a(x) := \exp(x \cdot \log(a)).$$

Satz 5.5.8 Die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und es gilt

i) $\exp_a(x + y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

ii) $\exp_a(n) = a^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$

iii) $\exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p}$ für alle $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \geq 2$.

Beweis. Die Funktion $\exp_a = f \circ g$ ist Verknüpfung der stetigen Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x \log(a)$ und $f = \exp$ und ist somit selbst stetig aufgrund von Satz 5.3.3.

i) Wir benutzen die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (s. Satz 4.5.3) und rechnen nach, dass gilt

$$\begin{aligned} \exp_a(x+y) &= \exp((x+y)\log(a)) = \exp(x\log(a) + y\log(a)) \\ &= \exp(x\log(a))\exp(y\log(a)) = \exp_a(x)\exp_a(y). \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Einsetzen von $y = -x$ direkt $\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}$.

ii) Per vollständiger Induktion folgt aus i) direkt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\exp_a(nx) = (\exp_a(x))^n. \tag{5.8}$$

Da $\exp_a(1) = \exp(\log(a)) = a$ und $\exp_a(-1) = \frac{1}{\exp_a(1)} = \frac{1}{a}$, folgt aus Gleichung (5.8) mit $x = 1$, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formeln $\exp_a(n) = a^n$ und $\exp_a(-n) = a^{-n}$ gelten.

iii) Es gilt per Definition und unter Verwendung von ii) und Gleichung (5.8) $a^p = \exp_a(p) = \exp_a(q \cdot \frac{p}{q}) = (\exp_a(\frac{p}{q}))^q$. Durch das Ziehen der q-ten Wurzel ergibt dies $a^{\frac{p}{q}} = \exp_a(\frac{p}{q})$. □

Wir nutzen diese Eigenschaften um einen Grenzwert zu bestimmen, den wir in Beispiel 4.1.3 erheblich umständlicher unter Verwendung der Bernoulli-Ungleichung berechnet haben.

Korollar 5.5.9 Für alle $a > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Beweis. Aufgrund der Stetigkeit von $\exp_a$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \exp_a(\frac{1}{n}) = \exp_a(0) = 1.$$ □

Aufgrund der Eigenschaften ii) und iii) in Satz 5.5.8 ist nun folgende Bezeichung naheliegend:

Definition 5.5.10 Wir bezeichnen für alle $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ nun mit

$$a^x := \exp_a(x) = \exp(x\log(a)).$$

Insbesondere ist $\exp(x) = \exp(x \cdot \log e) = e^x$.

Dabei ist zu beachten, dass wir nur von positiven Zahlen Potenzen ausrechnen können, da für negative der Logarithmus nicht definiert ist.
Für die Potenzen gelten folgende Rechenregeln:

Satz 5.5.11 Für alle $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

i) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,

ii) $(a^x)^y = a^{xy}$,

iii) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ und

iv) $(\frac{1}{a})^x = a^{-x}$.

Beweis. i) Dies ist eine Umformulierung der Funktionalgleichung (s. Satz 5.5.8 i))

ii) Da $a^x = \exp(x \log(a))$ gilt, erhalten wir durch Anwenden des Logarithmus $\log(a^x) = x\log(a)$. Somit gilt

$$(a^x)^y = \exp(y\log(a^x)) = \exp(y \cdot x \log(a)) = a^{yx} = a^{xy}.$$

iii) Wir benutzen die Funktionalgleichungen von exp und log und erhalten

$$\begin{aligned} a^x b^x &= \exp\big(x\log(a)\big)\exp\big(x\log(b)\big) \\ &= \exp\big(x\log(a) + x\log(b)\big) = \exp\big(x(\log(a)+\log(b))\big) \\ &= \exp(x\log(ab)) = (ab)^x. \end{aligned}$$

iv) Wir benutzen Korollar 5.5.6 und erhalten

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \exp(x\log(\frac{1}{a})) = \exp(-x\log(a)) = a^{-x}.$$ □

Als nächstes wollen wir einige Grenzwerte berechnen, in denen exp und log vorkommen.

Lemma 5.5.12 Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty$

ii) $\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^k = 0$

iii) $\lim_{x\downarrow 0} x^k e^{1/x} = \infty$

Beweis. i) Für alle $x > 0$ gilt

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

also ist $\frac{e^x}{x^k} > \frac{x}{(k+1)!}$ woraus $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} > \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(k+1)!} = \infty$ folgt.

ii) Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^k = \lim_{x\to\infty} (e^x x^{-k})^{-1} = \frac{1}{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k}} = 0.$$

iii) Es gilt

$$\lim_{x\downarrow 0} x^k e^{1/x} = \lim_{y\to\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^k e^y = \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{y^k} = \infty.$$

Wir haben dabei benutzt, dass für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und $x_n > 0$ die reziproke Folge $\big(\frac{1}{x_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt divergent ist und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty$ gilt (s. Lemma 3.2.8). Somit haben wir x durch $\frac{1}{y}$, sowie $\lim_{x\downarrow 0}$ durch $\lim_{y\to\infty}$ ersetzt. □

Lemma 5.5.13 i) $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$

ii) $\lim_{x\downarrow 0} \log x = -\infty$

Beweis. i) Sei $K > 0$ vorgegeben, dann gilt $\log x > K$ aufgrund der strengen Monotonie des Logarithmus für alle $x > e^K$. Also wird der Logarithmus größer als jede obere Schranke.

ii)

$$\lim_{x\downarrow 0} \log x = \lim_{y\to\infty} \log \frac{1}{y} = -\lim_{y\to\infty} \log y = -\infty. \qquad \square$$

Bisher konnten wir Potenzen von null nicht berechnen, da $0^\alpha = \exp(\alpha \log 0)$ nicht definiert ist. Da aber für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ $0^n = 0$ gilt, erscheint $0^\alpha := 0$ die einzig mögliche Definition zu sein. Das folgende Lemma zeigt, dass diese Definition auch eine stetige Funktion liefert.

Lemma 5.5.14 Für alle $\alpha > 0$ gilt

i) $\lim_{x\downarrow 0} x^\alpha = 0$

ii) $\lim_{x\downarrow 0} x^{-\alpha} = \infty$.

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit dem Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, für die $x_n > 0$ gilt. Dann ist $\lim_{n\to\infty} \alpha \log(x_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} \log(x_n) = -\infty$ (5.5.13i)). Da $\lim_{y\to-\infty} e^y = 0$ gilt, folgt daraus

$$\lim_{n\to\infty} x_n^\alpha = \lim_{n\to\infty} \exp(\alpha \log(x_n)) = 0.$$

Daraus folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{-\alpha} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n^\alpha} = \infty. \qquad \square$$

Somit können wir nun

$$0^\alpha := 0$$

definieren und erhalten aufgrund von Lemma 5.5.14 die stetige Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha.$$

5.6. Trigonometrische Funktionen

Ziel dieses Abschnitts ist die Definition der trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus. Dafür benötigen wir Wissen über das Verhalten der Exponentialfunktion für komplexe Zahlen. In Abschnitt 3.5 haben wir bereits die Begriffe Folge und Konvergenz für die komplexen Zahlen eingeführt. Ebenso ist es möglich Reihen, aber auch Funktionen über $\mathbb{C}$ zu betrachten. Die entsprechenden Definitionen übertragen sich direkt.

Definition 5.6.1 Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, dann definieren wir eine neue Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als eine Folge von **Partialsummen**

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k.$$

Wir bezeichnen abkürzend die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ und benutzen dieselbe Notation für den Grenzwert der Folge, sofern dieser existiert.

Ebenso lassen sich viele der Konvergenzkriterien direkt auf Reihen komplexer Zahlen übertragen.

Satz 5.6.2 (Quotientenkriterium)
Eine Reihe komplexer Zahlen $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergiert absolut, wenn es ein $q \in (0,1)$ gibt, sodass für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| \leq q < 1.$$

Beweis. Siehe Beweis von Satz 4.4.13. □

Dies ermöglicht die Konvergenz der Exponentialreihe auch für komplexe Zahlen zu beweisen.

Satz 5.6.3 Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Exponentialreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

absolut konvergent.

Beweis. Siehe Beweis von Lemma 4.5.2. □

Satz 5.6.4 Es gilt

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!} + R_{N+1}(z)$$

wobei $|R_{N+1}(z)| \leq 2\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1 + \frac{1}{2}N$.

Beweis. Siehe Beweis von Satz 4.5.3. □

Satz 5.6.5 Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2).$$

Beweis. Siehe Beweis von Satz 4.5.7. □

Korollar 5.6.6 Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z) \neq 0$.

Beweis. Aufgrund von

$$1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z)\exp(-z), \tag{5.9}$$

kann $\exp(z)$ nicht null sein. Denn wäre $\exp(z) = 0$, dann folgt aus (5.9) der Widerspruch 1=0. □

Anders als für reelle Zahlen, ist $\exp(z)$ nicht immer positiv. Zum einen muss der Grenzwert der Reihe nicht in $\mathbb{R}$ liegen. Zum anderen kann aber auch für ein $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ der Wert der Reihe $\exp(z)$ in $\mathbb{R}$ liegen und kann dann einen negativen Wert haben.

Satz 5.6.7 Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}.$$

Beweis. Wir bezeichnen die Partialsummen mit $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ und $s_n^*(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{z}^k}{k!}$ und berechnen unter Verwendung der Vertauschbarkeit der komplexen Konjugation mit der Addition und der Multiplikation (s. Gleichung (3.8))

$$\overline{s_n(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z^k}}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{z}^k}{k!} = s_n^*(z).$$

Somit gilt für den Grenzwert unter Verwendung von Lemma 3.5.4

$$\exp(\bar{z}) = \lim_{n\to\infty} s_n^*(z) = \lim_{n\to\infty} \overline{s_n(z)} = \overline{\lim_{n\to\infty} s_n(z)} = \overline{\exp(z)}.$$ □

Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{C}$ kann auch der Begriff der Stetigkeit analog zu dem der reellen Zahlen definiert werden (s. Def. 5.3.1).

Satz 5.6.8 Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(z)$ ist stetig.

Beweis. Siehe Beispiel 5.3.2. □

Durch das Einsetzen rein imaginärer Zahlen (also komplexer Zahlen, deren Realteil null ist) können wir nun Sinus und Cosinus definieren.

Definition 5.6.9 Sei $x \in \mathbb{R}$, dann definieren wir $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\cos x := \mathrm{Re}(\exp(ix)) \quad \text{und} \quad \sin x := \mathrm{Im}(\exp(ix)).$$

Eine direkte Konsequenz dieser Definition ist die Eulersche Formel

Satz 5.6.10 (Eulersche Formel)
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$e^{ix} = \exp(ix) = \cos x + i \sin x.$$

Bemerkung 5.6.11 Wir benutzen auch für komplexe Zahlen, wie in Definition 5.5.10 die Bezeichnung
$$e^{ix} := \exp(ix) = \exp(ix \log(e))$$
für die Exponentialfunktion.

Bemerkung 5.6.12 Wir berechnen mithilfe von Gleichung 3.11 den Betrag von e^{ix}:
$$\left|e^{ix}\right|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = e^{ix-ix} = e^0 = 1.$$
Dabei haben wir benutzt, dass aufgrund von Satz 5.6.7 die Beziehung
$$\overline{e^{ix}} = e^{\overline{ix}} = e^{-ix}$$
gilt.
Komplexe Zahlen der Form e^{ix} haben also den Betrag 1 und können daher in der komplexen Ebene auf dem Einheitskreis gezeichnet werden.

Satz 5.6.13 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

i) $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ und $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

ii) $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$

iii) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

Beweis. i) Dies folgt direkt aus der Definition, da für jede komplexe Zahl z sich der Realteil durch $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ und der Imaginärteil durch $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$ berechnet (s. Gleichung (3.9)).

ii) Dies folgt durch Einsetzen in die Formel aus i):
$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \frac{1}{2}\left(e^{i(-x)} + e^{-i(-x)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-ix} + e^{ix}\right) = \cos x\\ \sin(-x) &= \frac{1}{2i}\left(e^{i(-x)} - e^{-i(-x)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-ix} - e^{ix}\right)\\ &= -\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = -\sin x\end{aligned}$$

iii) Wir haben bereits in Bemerkung 5.6.12 gesehen, dass $\left|e^{ix}\right|^2 = 1$ gilt. Andererseits gilt für den Betrag aufgrund von Gleichung 3.10

$$\left|e^{ix}\right|^2 = (\mathrm{Re} e^{ix})^2 + (\mathrm{Im} e^{ix})^2 = \cos^2 x + \sin^2 x,$$

woraus wir die Behauptung erhalten. □

Satz 5.6.14 Die Funktionen $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} ix_n = ix$ und aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion $\lim_{n\to\infty} e^{ix_n} = e^{ix}$. Somit folgt aus der Tatsache, dass eine Folge komplexer Zahlen genau dann konvergiert, wenn die Folge der Real- bzw. der Imaginärteile konvergiert (s. Satz 3.5.3), dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \cos x_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re} e^{ix_n} = \mathrm{Re} e^{ix} = \cos x$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin x_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im} e^{ix_n} = \mathrm{Im} e^{ix} = \sin x$$ □

Eine Folgerung der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion sind die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus.

Satz 5.6.15 (Additionstheoreme)
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \text{und} \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

Beweis. Wir benutzen die Eulersche Formel (s. Satz 5.6.10) und schreiben

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) + i\sin(x+x) &= e^{i(x+y)} && \mid \text{Eulersche Formel}\\
&= e^{ix+iy} && \mid \text{Distributivgesetz in } \mathbb{C}\\
&= e^{ix}e^{iy} && \mid \text{Funktionalgleichung von exp}\\
&= \big(\cos x + i\sin x\big)\big(\cos y + i\sin y\big) && \mid \text{Eulersche Formel}\\
&= \big(\cos x\cos y - \sin x \sin y\big) && \mid \text{Ausmultiplizieren}\\
&\quad + i\big(\sin x\cos y + \cos x\sin y\big)
\end{aligned}$$

Der Vergleich von Real und Imaginärteil liefert nun die Additionstheoreme. □

Korollar 5.6.16 Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

und

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Satz 5.6.17 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Reihendarstellungen:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Beide Reihen konvergieren absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Die absolute Konvergenz folgt aus der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe. Wir müssen nun die Reihe $\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$ nach Real- und Imaginärteil aufteilen. Dafür bemerken wir, dass

$$i^k = \begin{cases} \pm 1 & \text{wenn } k \text{ gerade} \\ \pm i & \text{wenn } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Wir spalten die Reihe in ihre "geraden" und "ungeraden" Summanden auf

$$\begin{aligned} \exp(ix) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Der Realteil der Reihe $\exp(ix)$ ist somit durch $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ gegeben und der Imaginärteil durch $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. $\square$

Satz 5.6.18 (Restgliedabschätzung)
Es gilt

$$\cos x = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2N+2}(x) \quad \text{und} \quad \sin x = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2N+3}(x),$$

wobei für die Restglieder folgende Abschätzungen gelten:

$$|r_{2N+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2N+2}}{(2N+2)!} \quad \text{für} \quad |x| \leq 2N+3,$$
$$|r_{2N+3}(x)| \leq \frac{|x|^{2N+3}}{(2N+3)!} \quad \text{für} \quad |x| \leq 2N+4.$$

Wir benutzen die Restglieddarstellung um einige grundlegende Aussagen zu beweisen, unter anderem um einen Grenzwert zu bestimmen, der im nächsten Kapitel eine wichtige Rolle spielt.

Korollar 5.6.19 Es gilt
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Beweis. Wir benutzen die Restgliedabschätzung des Sinus für $N = 0$
$$\sin x = x + r_3(x), \quad \text{wobei} \quad |r_3(x)| \leq \frac{|x|^3}{3!} \quad \text{für} \quad |x| \leq 4.$$
Daraus folgt, dass
$$|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6} \quad \text{für} \quad |x| \leq 4$$
und somit gilt
$$\left|\frac{\sin x - x}{x}\right| \leq \frac{|x|^2}{6} \quad \text{für} \quad 0 < |x| \leq 4.$$
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $x_n \neq 0$, dann gibt es einen Index N, sodass $|x_n| < 4$ für alle $n \geq N$. Somit gilt
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\sin x_n - x_n}{x_n}\right| \leq \frac{|x_n|^2}{6} = 0.$$
□

Satz 5.6.20 Die Funktion cos hat im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle.

Um diesen Satz zu beweisen wollen wir den Zwischenwertsatz benutzen. Außerdem benötigen wir, dass die Funktion cos monoton in dem Intervall ist, um sicherzustellen, dass es nur eine Nullstelle gibt.

Lemma 5.6.21 i) $\cos 2 \leq -\frac{1}{3}$,

ii) $\sin x > 0$ für alle $x \in (0, 2]$,

iii) $\cos : [0, 2] \to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend.

Beweis. i) Aufgrund der Restgliedabschätzung des Cosinus für $N = 1$ gilt
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + r_4(x) \quad \text{wobei} \quad |r_4(x)| \leq \frac{|x|^4}{4!} \quad \text{für} \quad |x| \leq 5.$$
Insbesondere gilt also
$$\cos 2 = 1 - 2 + r_4(2) \quad \text{wobei} \quad |r_4(2)| \leq \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$
Also ist $\cos 2 \leq -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

ii) Wir benutzen die Restgliedabschätzung des Sinus für $N = 0$
$$\sin x = x + r_3(x) = x\left(1 + \frac{r_3(x)}{x}\right) \quad \text{wobei} \quad |r_3(x)| \leq \frac{|x|^3}{3!} \quad \text{für} \quad |x| \leq 4.$$

Also ist

$$\left|\frac{r_3(x)}{x}\right| \leq \frac{|x|^2}{6} \leq \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{für alle} \quad x \in (0,2].$$

Somit ist

$$\sin x \geq x\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{x}{3} > 0 \quad \text{für alle} \quad x \in (0,2].$$

iii) Seien $0 \leq y < x \leq 2$, dann gilt aufgrund von Korollar 5.6.16

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}.$$

Es gilt $\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \in (0,2]$ und somit ist aufgrund von Punkt ii) dieses Lemmas $\sin\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2} > 0$. Daraus folgt $\cos x - \cos y < 0$ und somit die strenge Monotonie. □

Beweis von Satz 5.6.20. Es gilt $\cos 0 = \frac{1}{2}(e^{i\cdot 0} + e^{-i\cdot 0}) = \frac{1}{2}(1+1) = 1 > 0$ und $\cos 2 \leq -\frac{1}{3} < 0$. Aus dem Zwischenwertsatzes (s. Satz 5.3.8) folgt die Existenz von mindestens einer Nullstelle des Cosinus im Intervall $[0,2]$. Aufgrund der strengen Monotonie gibt es aber acuh nur höchstens eine Nullstelle. □

Definition 5.6.22 Wir definieren die Zahl $\frac{\pi}{2}$ als die eindeutig bestimmte Nullstelle der Funktion Cosinus im Intervall $[0,2]$.

Satz 5.6.23 Die komplexe Exponentialfunktion nimmt folgende spezielle Werte an:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \quad \text{und} \quad e^{i2\pi} = 1.$$

Beweis. Wir wissen, dass $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ist, also folgt aus $\sin^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{2} = 1$, dass $\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$ ist. Aufgrund von Lemma 5.6.21ii) muss $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ sein. Daraus folgt

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\cdot 1 = i.$$

Aufgrund der Rechenregeln für Potenzen (s. Satz 5.5.11ii)) gilt nun

$$e^{n\cdot i\frac{\pi}{2}} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^n = i^n,$$

woraus sich die anderen Werte direkt ergeben. □

Korollar 5.6.24 Für Sinus und Cosinus gelten folgende spezielle Werte

$$\cos(0) = 1, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos\pi = -1, \quad \cos\frac{3\pi}{2} = 0 \quad \text{und} \quad \cos 2\pi = 1$$

$$\sin(0) = 0, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin\pi = 0, \quad \sin\frac{3\pi}{2} = -1 \quad \text{und} \quad \sin 2\pi = 0$$

Beweis. Wir berechnen zunächst direkt mit der Definition $\cos 0 = \frac{1}{2}(e^0 + e^0) = 1$ $\sin 0 = \frac{1}{2}(e^0 - e^0) = 0$.
Es gilt $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ per definition und $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ wurde im Beweis von Satz 5.6.23 gezeigt.
Die anderen Werte erhalten wir durch Vergleich von Real- und Imaginärteil aus den folgenden Gleichungen.

$$-1 = e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$-i = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$1 = e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi$$

□

Korollar 5.6.25 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

i) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ und $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$,

ii) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ und $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$,

iii) $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ und $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

Beweis. Wir benutzen für den Beweis die Eulersche Formel zusammen mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, sowie den in Satz 5.6.23 berechneten Werten.

1.
$$\cos(x + 2\pi) + i \sin(x + 2\pi) = e^{i(x+2\pi)} = e^{ix}e^{i2\pi} = e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

2.
$$\cos(x + \pi) + i \sin(x + \pi) = e^{i(x+\pi)} = e^{ix}e^{i\pi} = -e^{ix} = -\cos(x) - i \sin(x)$$

3.
$$\begin{aligned}
\cos(\frac{\pi}{2} - x) + i \sin(\frac{\pi}{2} - x) &= e^{i(\frac{\pi}{2} - x)} && \mid \text{Eulersche Formel} \\
&= e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-ix} && \mid \text{Funktionalgleichung} \\
&= i e^{-ix} && \mid \text{Satz 5.6.23} \\
&= i \cos(-x) + i^2 \sin(-x) && \mid \text{Eulersche Formel} \\
&= i \cos(-x) - \sin(-x) && \mid i^2 = -1 \\
&= \sin(x) + i \cos(x) && \mid \text{Satz 5.6.13ii)}
\end{aligned}$$

Die Aussagen ergeben sich nun durch den Vergleich von Real- und Imaginärteil. Alternativ hätte man die Additionstheoreme und Satz 5.6.24 für den Beweis verwenden können. □

Korollar 5.6.26 Die Nullstellen von Sinus und Cosinus sind durch folgende Mengen gegeben.

i) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

ii) $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis. i) Wir wissen bereits, dass $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ gilt und wollen jetzt zeigen, dass dies auch die einzigen Nullstellen des Sinus im Intervall $[0, 2\pi)$ sind.
Aus Lemma 5.6.21 folgt, dass $\cos x > 0$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2})$. Da $\cos(x) = \cos(-x)$ gilt (s. Satz 5.6.13ii)), folgt daraus, dass $\cos x > 0$ für $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Nun benutzen wir, dass $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ gilt (s. Korollar 5.6.25), woraus $\sin(x) > 0$ für $x \in (0, \pi)$ folgt. Außerdem gilt $\sin(x + \pi) = -\sin x$ (s. Korollar 5.6.25), woraus wir folgern, dass $\sin(x) < 0$ für $x \in (\pi, 2\pi)$.
Wir haben also gezeigt, dass $\sin(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0, \pi$ im Intervall $[0, 2\pi)$. Nun wollen wir daraus folgern, dass eine beliebige Nullstelle von sin von der Form $k\pi$ ist für $k \in \mathbb{Z}$.
Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin x = 0$. Wir definieren eine Zahl $m \in \mathbb{Z}$ durch $m = \lfloor \frac{x}{2\pi} \rfloor$. Dann gilt

$$x = 2m\pi + \tilde{x}, \quad \text{wobei} \quad \tilde{x} \in [0, 2\pi).$$

Somit erhalten wir (s. Korollar 5.6.25)

$$\sin \tilde{x} = \sin(x - 2m\pi) = \sin x = 0.$$

Das bedeutet aber, dass $\tilde{x} = 0$ oder $\tilde{x} = \pi$, was gleichbedeutend mit $x = 2m\pi$ oder $x = (2m + 1)\pi$ ist.

ii) folgt direkt aus i), wegen $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$. □

Korollar 5.6.27 Es gilt $e^{ix} = 1$, genau dann wenn $x = k \cdot 2\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Wir benutzen

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2i}(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}) = \frac{e^{-i\frac{x}{2}}}{2i}(e^{ix} - 1).$$

Es ist also $e^{ix} = 1$, genau dann wenn $\sin \frac{x}{2} = 0$ gilt, und somit genau dann, wenn $\frac{x}{2} = k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. □

Definition 5.6.28 Für $x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definieren wir

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Korollar 5.6.29 Für alle $x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$\tan(-x) = -\tan x \quad \text{und} \quad \tan(x + \pi) = \tan(x)$$

Beweis. Wir rechnen direkt nach unter Verwendung der entsprechenden Eigenschaften von Sinus und Cosinus, dass g

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

und

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

gilt. □

Satz 5.6.30 i) Die Funktion $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend mit dem Bild $[-1, 1]$. Die Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

heißt **Arcus-Cosinus**.

ii) Die Funktion $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend mit dem Bild $[-1, 1]$. Die Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

heißt **Arcus-Sinus**.

iii) Die Funktion $\tan : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und surjektiv. Die Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

heißt **Arcus-Tangens**.

Beweis. Wir müssen die Voraussetzungen von Satz 5.5.2 prüfen. □

Satz 5.6.31 (Polardarstellung komplexer Zahlen)
Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich schreiben in der Form

$$z = re^{i\varphi},$$

wobei $\varphi \in \mathbb{R}$ und $r = |z| \in \mathbb{R}$ mit $r \geq 0$.
Ist $z \neq 0$, dann ist φ eindeutig bestimmt bis auf die Addition von Vielfachen von 2π.

Beweis. Für $z = 0 = 0 \cdot e^{i\varphi}$ ist $r = 0$ und φ beliebig.
Sei also $z \neq 0$, dann definieren wir $r = |z|$ und setzen $\zeta = \frac{z}{r}$, dies ist eine komplexe Zahl vom Betrag $|\zeta| = 1$. Wir schreiben $\zeta = x + iy$, woraus $|\zeta|^2 = x^2 + y^2 = 1$ folgt und somit $|x| \leq 1$ ist. Wir können daher eindeutig einen Winkel

$$\alpha = \arccos x \in [0, \pi]$$

definieren. Es gilt $\cos\alpha = x$, woraus aus $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ folgt, dass

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-x^2} = \pm y$$

gilt. Wir setzen jetzt $\varphi = \alpha$, falls $\sin\alpha = y$ gilt und $\varphi = \alpha + \pi$, falls $\sin\alpha = -y$ gilt, denn dann ist $\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha = -(-y) = y$. Insgesamt gilt also

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi = x + iy = \zeta$$

und somit

$$z = |z| \frac{z}{|z|} = r\zeta = re^{i\varphi}.$$

Addieren wir zu dem Winkel φ ein Vielfaches von 2π, dann erhalten wir dieselbe komplexe Zahl, da $e^{i2\pi} = 1$ und somit

$$re^{i\varphi + ki2\pi} = re^{i\varphi}e^{ki2\pi} = re^{i\varphi}(e^{i2\pi})^k = re^{i\varphi} = z. \qquad \square$$

Bemerkung 5.6.32 Haben wir eine komplexe Zahl in der sogenannten *kartesichen Darstellung* $z = x + iy$ gegeben, dann können wir in die Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$ umwandeln indem wir berechnen:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und

$$\varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{r} & \text{wenn } y \geq 0 \\ \arccos \frac{x}{r} + \pi & \text{wenn } y \leq 0. \end{cases}$$

Wollen wir nicht den Radius r in der Formel für den Winkel benutzen, dann können wir den Arcustangens verwenden:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{wenn } x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{wenn } x = 0, y < 0, \\ \arctan \frac{y}{x} & \text{wenn } x > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Die Fallunterscheidungen kommen in beiden Fallen, dadurch zustande, dass das Bild des Arcuscosinus das Intervall $[0, \pi]$, bzw. das Bild der Funktion Arcustangens durch das offene Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist. Der Winkel hingegen ist bis auf die Addition eines Vielfachen von 2π eindeutig, kann also zum Beispiel im Intervall $\varphi \in [0, 2\pi)$ oder $\varphi \in [-\pi, \pi)$ gewählt werden.
Allerdings können wir durch Betrachten der Vorzeichen von Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl leicht überprüfen in welchem Intervall der Winkel φ liegen muss. Für $z = x + iy$ gilt

$$\begin{array}{lllll} x \geq 0 & y \geq 0 & \Rightarrow & \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] & \\ x \leq 0 & y \geq 0 & \Rightarrow & \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi] & \\ x \leq 0 & y \leq 0 & \Rightarrow & \varphi \in [\pi, \frac{3}{2}\pi], & \text{bzw. } \varphi \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ x \geq 0 & y \leq 0 & \Rightarrow & \varphi \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi], & \text{bzw. } \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \end{array}$$

Umgekehrt können wir eine komplexe Zahl in Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$ in die kartesische Darstellung $z = x + iy$ umrechnen durch:

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi.$$

Die Polardarstellung komplexer Zahlen erlaubt eine geometrische Interpretation des Produkts komplexer Zahlen. Seien $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ zwei komplexe Zahlen, dann ist

ihr Produkt
$$z_1z_2 = r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Wir erhalten also das Produkt indem wir die Beträge der Faktoren multiplizieren und ihre Winkel addieren.
Mit dieser Erkenntnis können wir eine Formel für Lösungen von Gleichungen der Form $z^n = a$ bestimmen.

Korollar 5.6.33 Sei $n \geq 1$, dann hat die Gleichung
$$z^n = 1$$
genau n verschiedene komplexe Lösungen, die durch
$$\zeta_k = e^{k\cdot i\frac{2\pi}{n}}, \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n-1$$
gegeben sind. Diese Lösungen werden als n-te **Einheitswurzeln** bezeichnet.

Beweis. Wir rechnen nach, dass durch ζ_k wirklich Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ gegeben sind, denn es gilt aufgrund von $e^{ki2\pi} = 1$
$$\zeta_k^n = \left(e^{k\cdot i\frac{2\pi}{n}}\right)^n = e^{n\cdot k\cdot i\frac{2\pi}{n}} = e^{k\cdot i2\pi} = 1.$$

Da eine Gleichung n-ten Grades höchstens n verschiedene Lösungen haben kann, sind wir fertig, wenn wir zeigen können, dass die ζ_k paarweise verschieden sind. Dafür nehmen wir an, es gibt $0 \leq k < \ell \leq n-1$ sodass $\zeta_k = \zeta_\ell$ gilt und folgern daraus, dass
$$e^{k\cdot i\frac{2\pi}{n}} = e^{\ell\cdot i\frac{2\pi}{n}} \iff e^{k\cdot i\frac{2\pi}{n}} - e^{\ell\cdot i\frac{2\pi}{n}} = 1 \iff e^{k\cdot i\frac{2\pi}{n}}\left(1 - e^{(\ell-k)\cdot i\frac{2\pi}{n}}\right) = 0$$
gilt. Da aber nun $0 < \ell - k < n-1$ gilt, ist $0 < \frac{\ell-k}{n} < 1$ und somit ist $(\ell-k)\frac{2\pi}{n}$ kein ganzzahliges Vielfaches von 2π, weshalb $e^{(\ell-k)\cdot i\frac{2\pi}{n}} \neq 1$ ist (s. Korollar 5.6.27). $\square$

Korollar 5.6.34 Sei $n \geq 1$, dann hat die Gleichung
$$z^n = a = re^{i\theta}$$
genau n verschiedene komplexe Lösungen, die durch
$$\xi_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+k\cdot\frac{2\pi}{n})} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}\zeta_k, \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n-1$$
gegeben sind. Dabei durchläuft ζ_k die n-ten Einheitswurzeln.

Beweis. Wir rechnen nach, dass
$$\xi_k^n = \left(\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}\zeta_k\right)^n = \sqrt[n]{r}^n\left(e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n\zeta_k^n = re^{ni\frac{\theta}{n}}\cdot 1 = re^{i\theta} = a$$
gilt. Da die n-ten Einheitswurzeln paarweise verschieden sind, sind auch die Lösungen ξ_k paarweise verschieden. Also haben wir n Lösungen einer Gleichung n-ten Grades gefunden. Dies müssen somit alle Lösungen der Gleichung sein. $\square$

Beispiel 5.6.35 i) Wir betrachten die Gleichung $z^4 = 1$. Die Lösungen sind die vierten Einheitswurzeln

$$\zeta_0 = e^{0\cdot i\frac{2\pi}{4}} = e^{0\cdot i\frac{\pi}{2}} = 1, \quad \zeta_1 = e^{1\cdot i\frac{2\pi}{4}} = e^{\,i\frac{\pi}{2}} = i,$$

$$\zeta_2 = e^{2\cdot i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\pi} = -1, \quad \zeta_3 = e^{3\cdot i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.$$

ii) Die dritten Einheitswurzeln sind durch

$$\zeta_0 = e^{0\cdot i\frac{2\pi}{3}} = 1, \quad \zeta_1 = e^{1\cdot i\frac{2\pi}{3}} \quad \zeta_2 = e^{2\cdot i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

gegeben. In Beispiel 3.5.2 haben wir bereits die Lösungen dieser Gleichung bestimmt und sehen jetzt, dass

$$\zeta_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \zeta_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

gilt.

iii) Jetzt wollen wir die Lösungen der Gleichung

$$z^4 = 4i \tag{5.10}$$

berechnen. Zuerst rechnen wir $a = 4i$ in Polardarstellung um. Diese Zahl ist rein imaginär und hat den Betrag $|a| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$. Da $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ gilt somit $a = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Um die Gleichung (5.10) zu lösen suchen wir nun komplexe Zahlen $z = re^{i\varphi}$, die

$$z^4 = r^4 e^{i4\varphi} = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$$

erfüllen. Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn sie den gleichen Betrag haben und sich die Winkel nur um eine Vielfaches von 2π unterscheiden, das heißt es muss gelten

$$r^4 = 4 \quad \text{und} \quad 4\varphi_k = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Daraus ergibt sich der Betrag

$$r = \sqrt[4]{4} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

und die Winkel

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{8}, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{4} = \frac{5}{8}\pi, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{4\pi}{4} = \frac{9}{8}\pi, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{8} + \frac{6\pi}{4} = \frac{13}{8}\pi$$

Weitere Winkel brauchen wir nicht zu betrachten, da sich $\varphi_4 = \frac{\pi}{8} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + 2\pi$ um ein Vielfaches von 2π von φ_0 unterscheidet und daher die deselbe komplexe Zahl liefert.

Somit sind die Lösungen der Gleichung (5.10) durch

$$\xi_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}, \quad \xi_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{8}}, \quad \xi_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{8}} \quad \text{und} \quad \xi_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{8}}$$

gegeben.

6. Differentiation

Die sogenannte Infinitessimalrechnung, also die Theorie der Folgen und ihrer Grenzwerte, wurde im ?? Jahrhundert unabhängig voneinander von Newton und Leibniz entwickelt um ein physikalisches Problem zu lösen. Konkret ging es um die Frage wie man *momentane Geschwindigkeiten* ausrechnen kann.
Unter Verwendung der Formel $v = \frac{s}{t}$, wobei v die Geschwindigkeit, s der Weg und t die Zeit ist, ist es einfach möglich *Durchschnittsgeschwindigkeiten* zu bestimmen. Legt zum Beispiel ein Wanderer einen Weg von $s = 12km$ in der Zeit von $t = 3h$ zurück, dann hatte er die durchschnittliche Geschwindigkeit von $v = \frac{12km}{3h} = 4\frac{km}{h}$. Es ist nun aber möglich, dass der Wanderer am Anfang viel schneller gelaufen ist, da er noch sehr fit war und der Weg einfach, aber auf dem steilen und schwierigen letzten Stück viel langsamer. Diese Information ist einer Durchschnittsgeschwindigkeit nicht zu entnehmen. Wir wollen jetzt annahmen, dass wir die Funktion

$$\begin{aligned} s : [0h, 3h] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto s(t) \end{aligned}$$

kennen, wobei $s(t)$ die Entfernung vom Startpunkt der Wanderung zum Zeitpunkt t ist. Wie ist es damit möglich die *momentane Geschwindigkeit* des Wanderers zu einem Zeitpunkt $t_0 \in [0h, 3h]$ zu bestimmen?

Zur Beantwortung dieser Frage wollen wir noch einmal auf die die durchschnittliche Geschwindigkeit zurückkommen. Zur Berechnung der Durchschnittsgeschwindigkleit in der Zeit von t_0 bis t_1 benutzen wir die Formel $v = \frac{s}{t}$. Dabei ist $t = t_1 - t_0$ die zwischen den Zeitpunkten t_0 und t_1 verstrichenen Zeit und $s = s(t_1) - s(t_0)$ der in diesem Zeitraum zurückgelegte Weg. Also ist die Geschwindigkeit durch

$$v = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

gegeben. Zur Berechnung die momentanen Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 ist diese Formel aber erst einmal ungeeignet, da wir sowohl für die verstrichenen Zeit $t = t_0 - t_0 = 0$ als auch für den zurückgelegten Weg $s = s(t_0) - s(t_0) = 0$ erhalten und die Geschwindigkeit $v = \frac{0}{0}$ sich nicht berechnen lässt.
Wählen wir nun allerdings für t_1 einen Zeitpunkt der sehr nah an t_0 ist, aber noch nicht gleich t_0, z.B. $t_1 = t_0 + h$, wobei h sehr klein ist dann ist der Quotient

$$\frac{s(t_0 + h) - s(x_0)}{t_0 + h - t_0} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

definiert und liefert eine gute Annäherung an die momentanen Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0. Lassen wir jetzt h immer kleiner werden, dann wird die Annäherung immer besser. Anders formuliert: Die momentane Geschwindigkeit des Wanderes zum Zeitpunkt t_0, kurz $v(t_0)$ ist gegeben durch den Grenzwert (sofern er existiert)

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}. \tag{6.1}$$

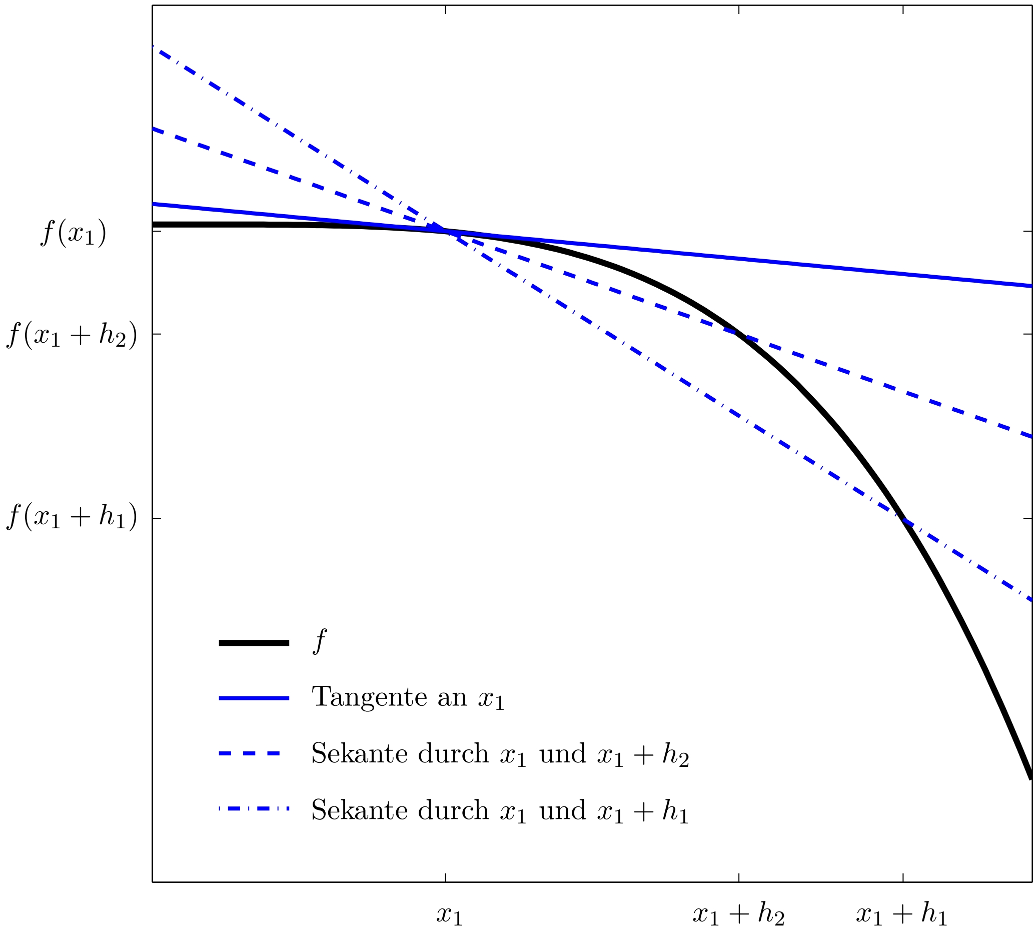

Abbildung 6.1.: Der Graph einer Funktion f, sowie die Tangente und zwei Sekanten durch $(x_0, f(x_0))$.

Eine alternative Interpretation des Grenzwertes (6.1) ist geometrischer Natur. Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir wollen die Tangente an den Graph der Funktion f durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ bestimmen, wobei $x_0 \in D$.
Wir gehen nun genauso vor wie zur Berechnung von momentanen Geschwindigkeiten. Und zwar bestimmen wir zunächst den Anstieg der Sekante durch zwei Punkte auf dem Graph von f. Seien $x_0, x_1 \in D$ und $x_0 \neq x_1$, dann berechnet sich der Anstieg m der Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ über die Formel

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Den Anstieg der Tangente an $(x_0, f(x_0))$ können wir direkt mit dieser Formel nicht bestimmen, da der Nenner $x_0 - x_0 = 0$ ist. Aus diesem Grund wählen wir $x_1 = x_0 + h$, einen Wert der nah an x_0 liegt. Nun lassen wir h immer kleiner werden, wodurch sich der Anstieg der Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ immer mehr dem Anstieg der Tangente an $(x_0, f(x_0))$ nähert. Letzterer ist dann als Grenzwert

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

definiert (Vgl. Abb. 6.1).

6.1. Der Differenzialquotient

Definition 6.1.1 Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $x_0 \in D$ definieren wir einen **Differenzenquotient** durch

$$D_h f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

wobei $h \neq 0$ und $x_0 + h \in D$ sein muss.

Der Differenzenquotient gibt also die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Definition 6.1.2 Sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar** in $x_0 \in D$, wenn für alle Nullfolgen $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $h_n \neq 0$ und $x_0 + h_n \in D$ die Folge der Differenzenquotienten $(D_h f(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert konvergiert, das heißt, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.
Der Grenzwert $f'(x_0)$ heißt **Differentialquotient** oder **Ableitung** von f in x_0 und wird auch mit $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ bezeichnet.
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in D, falls f für alle $x_0 \in D$ differenzierbar ist. Sie heißt **stetig differenzierbar**, falls die Funktion $f' : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ stetig ist.

Bemerkung 6.1.3 Der Grenzwertes $\lim_{x \to a} f(x)$ berechnet sich per Definition 5.2.5 als Grenzwert $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$, wobei $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ und $x_n \neq a$. Dies ist bei der Definition des Differentialquotient wichtig, da es genau besagt, dass wir nicht durch null dividieren.

Bemerkung 6.1.4 Wir können alternativ die Ableitung als Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

definieren. Wir haben hier $h = x - x_0$ gesetzt und müssen daher den Grenzwert für $x \to x_0$ berechnen.
In der Physik wird für die Ableitung oft ein Punkt statt eines Striches benutzt, insbesondere dann, wenn die Funktion von der Zeit t abhängig ist. Ist zum Beispiel

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto x(t)$ die Ortskurve eines Massenpunktes, dass ist $v(t) := \dot{x}(t)$ seine Geschwindigkeit zur Zeit t.

Als ersten wollen wir direkt mit der Definition, sowie den Rechenregeln für Grenzwerte (s. Prop. 3.2.16) die Ableitungen wichtiger Funktionen bestimmen.

Beispiel 6.1.5 i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = c$ eine konstante Funktion, dann ist für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ die Ableitung von f gegeben durch:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = cx$ eine Funktion mit konstantem Anstieg, dann ist für alle $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c(x_0+h) - cx_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ch}{h} = \lim_{h\to 0} c = c.$$

iii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ eine quadratische Funktion, dann ist für alle $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x_0 + h) = 2x_0. \end{aligned}$$

iv) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ eine rationale Funktion, dann ist für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \neq 0$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0} \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{x_0 - (x_0+h)}{(x_0+h)x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(x_0+h)x_0} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x_0+h)x_0} = \frac{-1}{x_0^2}. \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile haben wir den Hauptnenner der beiden Brüche gebildet.

v) Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ die Ableitung

$$\begin{aligned} \exp'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x_0+h) - \exp(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x_0)\exp(h) - \exp(x_0)}{h} \\ &= \exp(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x_0). \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass $\lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = 1$, wie in Beispiel 5.2.6 gezeigt wurde.

vi) Der Sinus $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat die Ableitung

$$\begin{aligned}\sin'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(x_0+\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \cos(x_0+\frac{h}{2})\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \cos(x_0).\end{aligned}$$

Hier haben wir Korollar 5.6.16 für das Umschreiben der Differenz $\sin(x_0+h)-\sin(x_0)$ benutzt. Außerdem haben wir verwendet, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \lim_{\tilde{h}\to 0} \frac{\sin(\tilde{h})}{\tilde{h}} = 1$$

gilt, wie wir in Korollar 5.6.19 gezeigt haben.

vii) Ebenfalls unter Verwendung der Korollare 5.6.16 und 5.6.19 berechnen wir die Ableitung des Cosinus $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\cos'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0+h)-\cos(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin(x_0+\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \sin\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = -\sin(x_0).\end{aligned}$$

viii) Der Absolutbetrag $\mathrm{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. Um dies zu sehen betrachten wir die Nullfolge $h_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{abs}(0+h_n)-\mathrm{abs}(0)}{h_n} = \frac{|0+h_n|-|0|}{h_n} = \frac{\frac{1}{n}}{(-1)^n\frac{1}{n}} = (-1)^n.$$

Diese Folge $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht, also ist der Absolutbetrag nicht in 0 differenzierbar.

Definition 6.1.6 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt in $x_0 \in D$ von **rechts** (bzw. von **links**) **differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$f'_+(x_0) := \lim_{x\downarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \left(\text{bzw.} \quad f'_-(x_0) := \lim_{x\uparrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$

existiert.

Beispiel 6.1.7 Der Absolutbetrag ist in 0 zwar nicht differenzierbar, aber er ist sowohl von rechts als auch von links differenzierbar. Sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $h_n > 0$, dann gilt

$$\mathrm{abs}'_+(0) := \lim_{x\downarrow x_0} \frac{\mathrm{abs}(x)-\mathrm{abs}(0)}{x-0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{abs}(h_n)-\mathrm{abs}(0)}{h_n-0} = \lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{h_n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Sei nun $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $h_n < 0$, dann gilt

$$\operatorname{abs}'_-(0) := \lim_{x\uparrow x_0} \frac{\operatorname{abs}(x) - \operatorname{abs}(0)}{x-0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{abs}(h_n) - \operatorname{abs}(0)}{h_n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{-h_n}{h_n} = \lim_{n\to\infty} -1 = -1.$$

Eine wesentliche Eigenschaft einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, die im Punkt a differenzierbar ist, besteht darin, dass die Tangente

$$t : D \to \mathbb{R}, x \mapsto t(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

im Punkt a an den Graphen von f in einer **kleinen Umgebung** dieses Punktes eine gute Approximation der (möglicherweise ziemlich komplizierten) Funktion f ist. Unter gewissen Voraussetzungen, werden wir daher für weitergehende Berechnungen f durch die Tangente t ersetzen können um so das Problem zu vereinfachen, aber trotzdem noch qualitative Aussagen über das ursprüngliche Problem treffen zu können.
Dieses Vorgehen werden wir in Kürze für die Untersuchung von Rekursionsgleichungen benutzen.

Satz 6.1.8 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in D$, sodass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit $x_n \in D\backslash\{a\}$ für die $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt.
$f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in a differenzierbar, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f(x) = f(a) + c(x-a) + \varphi(x) \quad \text{für alle} \quad x \in D,$$

wobei $\varphi : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist mit

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0.$$

Dabei ist $c = f'(a)$.

Beweis. "$\Rightarrow$" Angenommen f sei in a differenzierbar. Dann setzen wir $c = f'(a)$ und definieren durch $\varphi(x) = f(x) - f(a) - c(x-a)$ eine Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$, für die gilt:

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - c \right) = f'(a) - c = 0.$$

"$\Leftarrow$" Angenommen es gibt eine Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$, für die $f(x) = f(a) + c(x-a) + \varphi(x)$ und $\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0$ gilt, dann ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x) - f(x)}{x-a} \right) - c &= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x) - f(x)}{x-a} - c \right) \\
&= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x) - f(x) - c(x-a)}{x-a} \right) \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0
\end{aligned}$$

und somit ist f in a differenzierbar mit der Ableitung $f'(a) = c$. $\square$

Bemerkung 6.1.9 Die Forderung $\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{x-a} = 0$ impliziert, dass $\lim_{x\to a}\varphi(x) = 0$ ist. Denn wäre $\lim_{x\to a}\varphi(x) = b$, dann folgt daraus $\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{x-a} = \frac{b}{0} = \infty$. Also geht $\varphi(x)$ für $x \to a$ schneller gegen null, als der Ausdruck $x - a$.

Daraus folgt nun, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $|\varphi(x)| < \epsilon$ gilt für $|x - a| < \delta$. Wählen wir also $\epsilon > 0$ klein, dann ist

$$\big|f(x) - f(a) + f'(x)(x-a)\big| = |\varphi(x)| < \epsilon$$

für $|x-a| < \delta$ und somit kann die Funktion f gut durch die Tangente $f(a) + f'(x)(x-a)$ approximiert werden.

Korollar 6.1.10 Wenn $f : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ differenzierbar ist, dann ist f in a stetig.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\big(f(a) + c(x-a) + \varphi(x)\big)\\ &= f(a) + c\lim_{x\to a}(x-a) + \lim_{x\to a}\varphi(x)\\ &= f(a) + 0 + 0 = f(a).\end{aligned}$$

und somit ist f folgenstetig in a. □

Satz 6.1.11 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbare Funktionen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch

$$f + g, \quad \lambda f, \quad f \cdot g : D \to \mathbb{R}$$

in x_0 differenzierbar und es gilt:

i) Linearität:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \quad \text{und} \quad (\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

ii) Produktregel

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

iii) Quotientenregel: Ist $g(x_0) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar mit der Ableitung

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Beweis. i) Die Linearität folgt aus den Rechenregeln für Grenzwerte (s. Prop. 3.2.16)

$$(\lambda f)'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{(\lambda f)(x_0+h) - (\lambda f)(x_0)}{h} = \lambda\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lambda f'(x_0).$$

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-f(x_0)-g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = f'(x_0)+g'(x_0).\end{aligned}$$

ii) Um die Produktregel zu beweisen, fügen wir den Ausdruck

$$0 = -f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h)$$

in den Zähler des Differenzenquotienten ein und benutzen erneut die Rechenregeln für Grenzwerte.

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} g(x_0+h) + f(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\ &= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir $\lim_{h\to 0} g(x_0+h) = g(x_0)$ verwendet, was aus der Stetigkeit von g im Punkt x_0 (s. Kor. 6.1.10) folgt.

iii) Wir betrachten zunächst $f = 1$ und berechnen

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{g(x_0)g(x_0+h)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\left(g(x_0+h)-g(x_0)\right)}{h} \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x_0)g(x_0+h)} = -g'(x_0)\frac{1}{g(x_0)^2}\end{aligned}$$

Hier haben wir im letzten Schritt ebenfalls die Stetigkeit von g im Punkt x_0 benutzt.

Mithilfe der Produktregel können wir nun die Quotientenregel beweisen

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{1}{g(x_0)}\right)' \\ &= f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-g'(x_0)\frac{1}{g(x_0)^2}\right) \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.\end{aligned}$$

□

Diese Regeln erlauben es uns die Ableitungen von Polynomen und gebrochen rationalen Funktionen zu bestimmen.

Beispiel 6.1.12 i) Die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ für $n \in \mathbb{N}$ hat die Ableitung

$$f_n'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = n x^{n-1}. \tag{6.2}$$

Wir beweisen diese Aussage per vollständiger Induktion. Der Induktionsanfang für $n = 0$ folgt aus Beispiel 6.1.5i). Die Funktion $f_0(x) = x^0 = 1$ ist konstant, also ist ihre Ableitung $f_0'(x) = 0$, was mit der Formel $f_0'(x) = 0x^{0-1}$ übereinstimmt.

Alternativ hätten wir auch $n = 1$ oder $n = 2$ als Induktionsanfang benutzen können. Die Funktion $f_1(x) = x^1 = x$ hat aufgrund von Beispiel 6.1.5ii) die Ableitung $f_1'(x) = 1$, was der Formel $f_1'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$ entspricht. Aufgrund von Beispiel 6.1.5iii) wissen wir, dass die Ableitung von $f_2(x) = x^2$ durch $f_2'(x) = 2x$ gegeben ist, was ebenfalls der Formel $f_2'(x) = 2 \cdot x^{2-1}$ entspricht.

Für den Induktionsschritt nehmen wir daher an, dass die Formel (6.2) für eine natürliche Zahl n stimmt und beweisen nun mithilfe der Produktregel

$$f_{n+1}'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot x^n) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x \cdot x^n + x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = 1 \cdot x^n + x \cdot (nx^{n-1}) = (1+n)x^n,$$

dass die Formel (6.2) auch für $n + 1$ richtig ist.

ii) Die Funktion $f_{-n} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ hat mithilfe der Quotientenregel die Ableitung

$$f_{-n}'(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n)\frac{1}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -n\frac{1}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1} = -nf_{-n-1}(x).$$

Das bedeutet, dass die Regel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

iii) Aus den vorherigen Beispielen zusammen mit Satz 6.1.11 folgt nun, dass Polynome für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind. Rationale Funktionen sind für alle x in ihrem Definitionsbereich differenzierbar.

iv) Die Funktion Tangens wurde definiert durch $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und somit berechnet sich die Ableitung zu

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Wir haben im letzten Beispiel an einigen Stellen die Notation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ statt des Strichs benutzt um besser klar zu stellen von welcher Funktion die Ableitung berechnet wird.

Satz 6.1.13 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige streng monotone Funktion und $\varphi = f^{-1} : D^* \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f, wobei $D^* = f(D)$.
Ist f in $x \in D$ differenzierbar und $f'(x) \neq 0$, dann ist φ in $y := f(x)$ differenzierbar und es gilt:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\varphi(y))}.$$

Beweis. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit dem Grenzwert $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, sodass $y_n \in D^*$ und $y_n \neq y$. Wir definieren dann eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $x_n = \varphi(y_n)$. Das ist gleichbedeutend mit $y_n = f(x_n)$. Aufgrund der Stetigkeit der Umkehrfunktion φ (s. Satz 5.5.2) können die Grenzwertbildung und das Anwenden von φ vertauschen und erhalten für den Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) = \varphi(\lim_{n\to\infty} y_n) = \varphi(y) = x.$$

Außerdem bemerken wir, dass aufgrund der Bijektivität von φ $x_n \neq x$ gilt und wir durch $x - x_n$ dievidieren können. Dies rechfertigt die folgende Berechnung der Ableitung der Umkehrfunktion

$$\varphi'(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(y_n) - \varphi(y)}{y_n - y} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x}} = \frac{1}{f'(x)}. \qquad \square$$

Beispiel 6.1.14 i) Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, also gilt für die Ableitung

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

ii) Die Ableitung des Arcus-Tangens berechnet sich unter Verwendung von Beispiel 6.1.12iv) zu

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \cos^2(\arctan(x)). \tag{6.3}$$

Dieser Ausdruck lässt sich vereinfachen indem wir $y = \arctan x$ setzen. Dies ist gleichbedeutend ist mit $x = \tan y$ und wir berechnen

$$x^2 = \tan^2(y) = \frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)} = \frac{1 - \cos^2(y)}{\cos^2(y)} = \frac{1}{\cos^2(y)} - 1.$$

Durch Umstellen dieser Gleichung erhalten wir

$$x^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2(y)} \iff \cos^2(y) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Durch Einsetzen in Gleichung (6.3) folgt daraus, dass

$$\arctan'(x) = \cos^2(\arctan(x)) = \cos^2(\arctan(\tan(y))) = \cos^2(y) = \frac{1}{1 + x^2}$$

gilt.

Beispiel 6.1.15 In Bemerkung 4.5.6 wurde behauptet, das die Eulersche Zahl e der Grenzwert der Folge $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Dies folgt für $x = 1$ aus der allgemeineren Behauptung

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x).$$

Für nehmen für den Beweis an, dass $x \neq 0$ ist, da wir diesen Spezialfall direkt berechnen können

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{0}{n}\right)^n = 1.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\exp\left(n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) && \mid \text{Definition } a^n=\exp(n\log a)\\
&= \lim_{n\to\infty}\exp\left(x\frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right) && \mid \text{Einfügen von } \frac{x}{x}\\
&= \lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right)^x && \mid \text{Rechenregeln für Potenzen}\\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right)^x && \mid \text{Stetigkeit von exp}\\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)-\log(1)}{\frac{x}{n}}\right)^x && \mid \text{Einfügen von } \log 1=0\\
&= \exp(\log'(1))^x=\exp(1)^x=e^x
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass der Ausdruck in der Klammer genau der Differenzenquotient zur Berechnung der Ableitung des Logarithmus and der Stelle 1. Diese Ableitung ist aber nach dem Beispiel 6.1.14i) durch $\log'(1)=\frac{1}{1}=1$ gegeben.

Satz 6.1.16 (Kettenregel)
Seien $f: D\to\mathbb{R}$ und $g: E\to\mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D)\subseteq E$.
f sei in $x_0\in D$ differenzierbar und g sei in $y_0=f(x_0)\in E$ differenzierbar, dann ist $g\circ f: D\to\mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Beweis. Wir definieren eine in y_0 stetige Funktion $g^*: E\to\mathbb{R}$ durch

$$g^*(y)=\begin{cases}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{wenn } y\neq y_0\\ g'(y_0) & \text{wenn } y=y_0.\end{cases}$$

Da g in y_0 differenzierbar ist, folgt die Stetigkeit der Funktion g^* in y_0

$$\lim_{y\to y_0} g^*(y)=\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=g'(y_0)=g^*(y_0). \tag{6.4}$$

Außerdem gilt für alle $y\in E$

$$g(y)-g(y_0)=g^*(y)(y-y_0). \tag{6.5}$$

Somit können wir die Ableitung der Verknüpfung von f und g berechnen

$$
\begin{aligned}
(g\circ f)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0} && \mid \text{Definition Ableitung}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} && \mid \text{Definition Verknüpfung von Funktionen}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{g^*(f(x))(f(x)-f(x_0))}{x-x_0} && \mid \text{Gleichung (6.5) mit } y=f(x) \text{ und } y_0=f(x_0)\\
&= \lim_{x\to x_0} g^*(f(x)) \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} && \mid \text{Rechenregeln für Grenzwerte}\\
&= g'(f(x_0)) \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} && \mid \text{Gleichung (6.4)}\\
&= g'(f(x_0))f'(x_0) && \mid \text{Definition Ableitung}
\end{aligned}
$$

Dies liefert die behauptete Regel. □

Beispiel 6.1.17 i) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Potenzfunktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha := \exp(\alpha \log x)$. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\exp(\alpha\log x)) = \exp'(\alpha\log x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha\log x) = \exp(\alpha\log x)\alpha\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Die in Beispiel 6.1.12 bewiesene Ableitungsregel ist also auch für reelle Exponenten richtig. Daraus folgt nun insbesondere

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Dies hätte man alternativ mit Satz 6.1.13 beweisen können, denn die Quadratwurzel ist die Umkehrfunktion von $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, y \mapsto y^2$ und somit gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \frac{1}{g'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

ii) Sei $a > 0$, dann ist die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a^x = \exp(x \log a)$ durch

$$f'(x) = \exp'(x\log a)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\log a) = \exp(x\log a)\log a = a^x\log a.$$

gegeben.

Da die Ableitung einer Funktion wieder selbst eine Funktion ist, können wir auch davon wieder die Ableitung berechnen und auf diese Art und Weise höhere Ableitungen definieren.

Definition 6.1.18 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ in D differenzierbar. Ist die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, dann heißt

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = f''(x_0) := \left(f'\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

die **zweite Ableitung** von f in x_0.

Nun können wir induktiv k-te Ableitungen definieren. Ist die Funktion f $(k-1)$-mal differenzierbar und ist die $(k-1)$-te Ableitung $f^{(k-1)}$ differenzierbar, dann ist f k-mal differenzierbar und wir bezeichnen mit

$$\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x_0) = f^{(k)}(x_0) := \left(f^{(k-1)}\right)'(x_0)$$

die k-te Ableitung von f. Wir bezeichnen dabei $f^{(0)} = f$ die Funktion selbst.

Existiert für alle $k \in \mathbb{N}$ die k-te Ableitung der Funktion f, dann nennen wir f unendlich oft differenzierbar.

Bemerkung 6.1.19 In der Physik werden für die zweite Ableitung nach der Zeit analog zur ersten Ableitung oft zwei Punkte verwendet. Ist $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto x(t)$ die Ortskurve eines Massenpunktes, dass ist $a(t) := \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$ seine Beschleinigung zur Zeit t.

Satz 6.1.20 (Leibnizregel)
Die k-te Ableitung des Produkts $f \cdot g$ berechnet sich zu

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(fg) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$$

Beweis. Der Induktionsanfang $n = 1$ folgt direkt aus der Produktregel

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}x^1}(f(x)g(x)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x)) \\ &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \\ &= \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} f^{(i)}(x) g^{(1-i)}(x).\end{aligned}$$

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Formel für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt und zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ gilt. Dabei gehen wir bei den Umformungen analog zum Beweis des binomischen Lehrsatzes 2.1.11 vor und erhalten :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(fg) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(fg)\right) && \mid \text{Definition der } n\text{-ten Ableitung} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} && \mid \text{Induktionsvoraussetzung} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f^{(n-k)} g^{(k)}) && \mid \text{Linearität der Ableitung}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{(k+1)} \right) && \mid \text{Produktregel} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)} && \mid \text{Aufspalten der Summe} \\
&= \binom{n}{0} f^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} g^{(k)} && \mid \text{Abspalten von } k=0 \text{ von der Summe} \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)} + \binom{n}{n} g^{(n+1)} && \mid \text{Abspalten von } k=n \text{ von der Summe} \\
&= f^{(n+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} f^{(n-(k+1)+1)} g^{(k+1)} && \mid \text{Shiften der Summe} \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)} + g^{(n+1)} && \mid \\
&= f^{(n+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \right] f^{(n-k)} g^{(k+1)} + g^{(n+1)} && \mid \text{Zusammenfassen gleicher Potenzen} \\
&= f^{(n+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} f^{(n-k)} g^{(k+1)} + g^{(n+1)} && \mid \text{Lemma 2.1.9iii)} \\
&= \binom{n+1}{0} f^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(n-(k-1))} g^{k} + \binom{n+1}{n+1} g^{(n+1)} && \mid \text{Shiften der Summe} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} && \mid \text{Erweitern der Summation auf } k=0 \text{ und } k=n+1
\end{aligned}
$$

□

6.2. Lokale Extrema und der Mittelwertsatz

Nachdem wir im letzten Abschnitt die Ableitungen der wichtigsten Funktionen bestimmt haben und alle Ableitungsregeln bewiesen haben, wollen wir nun zu den Anwendungen der Differentialrechnung kommen. Dazu gehören zunächst das Monotonieverhalten von Funktionen, die Bestimmung von lokalen Extrema, sowie die Regeln von de l'Hospital, die uns die Berechnung von Grenzwerten vereinfachen.

Definition 6.2.1 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, f hat in $x_0 \in D$ ein lokales Maximum (bzw. ein lokales Minimum), wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (\text{bzw. } f(x_0) \leq f(x)) \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap D.$$

Gilt sogar

$$f(x_0) > f(x) \quad (\text{bzw. } f(x_0) < f(x)) \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap D, x \neq x_0,$$

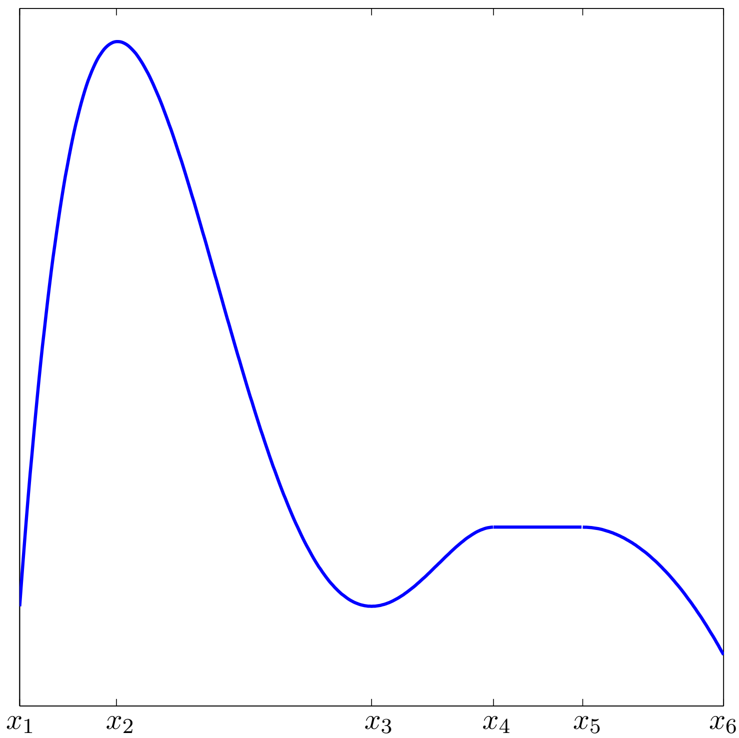

Abbildung 6.2.: Der Graph einer Funktion. In x_2 hat die Funktion ein striktes globales Maximum. Jeder Punkt zwischen x_4 und x_5 ist ein lokales Maximum, das nicht strikt ist. In x_3 hat die Funktion ein striktes lokales Minimum. Auch die Randpunkte x_1 und x_6 sind strikte lokale Minima, der Punkt x_6 ist sogar ein globales Minimum.

dann ist das Maximum (bzw. das Minimum) **strikt.**

Gelten die entsprechenden Aussage für alle $x \in D$, dann handelt es sich um ein **globales** (striktes) Minimum, bzw. Maximum (Vgl. Abb. 6.2).

Satz 6.2.2 Wenn die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum besitzt und in x_0 differenzierbar ist, dann gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis. Sei x_0 ein lokales Maximum von f (für ein lokales Minimum funktioniert der Beweis auf analoge Art und Weise). Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ so dass $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subseteq (a, b)$ (s. Lemma 5.1.3) und $f(x) \le f(x_0)$ für alle $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ gilt. Daraus folgt, dass die rechtsseitige, bzw. die linksseitige Ableitung im Punkt x_0 folgendes Vorzeichen haben muss:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{und} \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Dies gilt, da in beiden Fällen der Zähler negativ ist, wohingegen der Nenner für $f'_+(x_0)$ positiv ist und für $f'_-(x_0)$ negativ ist.
Da nun aber f in x_0 differenzierbar ist müssen rechtseitige und linksseitige Ableitung übereinstimmen, also gilt

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0$$ □

Bemerkung 6.2.3

- Die Bedingung, das für ein Extremum $f'(x_0) = 0$ gilt, ist notwendig, aber nicht hinreichend. So hat zum Beispiel $f(x) = x^3$ kein Extremum, aber es gilt $f'(0) = 0$.

- Eine wichtige Vorraussetzung des Satzes ist, dass die Funktion auf einem offenen Intervall definiert ist. Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt immer ihr Maximum und ihr Minimum an (s. Satz 5.3.15), wenn dieses Extremum allerdings in einem Randpunkt $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ liegt, dann kann $f'(x_0) \neq 0$ sein.
  Zum Beispiel nimmt die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ihr Minimum im inneren Punkt $x_{\text{min}} = 0$ an. Da sich die Ableitung zu $f'(x) = 2x$ berechnet, gilt dort $f'(x_{\text{min}}) = 0$. Ihr Maximum nimmt die Funktion f hingegen auf den Randpunkten $x^1_{\text{max}} = -1$ und $x^2_{\text{max}} = 1$ an. Dort hat die Ableitung die Werte $f'(-1) = -2$, bzw. $f'(1) = 2$.

Für stetige Funktionen haben wir den Zwischenwertsatz kennengelernt (s. Satz 5.3.8 und Korollar 5.3.12). Eine vergleichbare Aussage für differenzierbare Funktionen liefert der Satz von Rolle und der Mittelwertsatz.

Satz 6.2.4 (Satz von Rolle)
Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Die Funktion sei für alle $x \in (a, b)$ differenzierbar. Dann existiert ein $p \in (a, b)$ mit $f'(p) = 0$.

Beweis. Wir wissen, dass eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ immer ihr Maximum und ihr Minimum annimmt (s. Satz 5.3.15). Wir müssen daher zeigen, dass entweder das Maximum oder das Minimum für ein p im offenen Intervall $p \in (a, b)$ angenommen wird, dann folgt aus Satz 6.2.2, dass $f'(p) = 0$ ist.
Ist f konstant, dann erfüllt jeder Punkt $p \in (a, b)$ die Forderung $f'(p) = 0$ (s. Bsp. 6.1.5i).
Sei also f nicht konstant, dann gibt es ein $x \in (a, b)$ sodass $f(x) > f(a)$ oder $f(x) < f(a)$ gilt. Also liegt das Maximum oder das Minimum nicht auf dem Rand der Intervall. □

Insbesondere folgt aus dem Satz von Rolle, dass zwischen zwei Nullstellen einer stetigen Funktion f immer eine Nullstelle der Ableitung liegt.

Korollar 6.2.5 (Mittelwertsatz)
Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die für alle $x \in (a,b)$ differenzierbar ist. Dann existiert ein $p \in (a,b)$ sodass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(p)$$

gilt.

Beweis. Wir definieren eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Diese Funktion erfüllt die Voraussetzungen des Satz von Rolle, denn sie ist stetig und für alle $x \in (a,b)$ differenzierbar. Außerdem gilt

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a) \quad \text{und} \quad F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

Somit gibt es ein $p \in (a,b)$, dass $F'(p) = 0$ erfüllt. Da sich aber die Ableitung von F zu

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

berechnet, ist dies gleichbedeutend mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(p)$. □

Geometrisch besagt der Mittelwertsatz, dass es einen Punkt im Intervall (a,b) gibt, der den gleichen Anstieg hat wie die Gerade $g : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x - b) + f(b)$, die durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verläuft. Da die Ableitung $f'(x)$ den Anstieg der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt $x \in D$ beschreibt, also die momentane Änderungsrate von f, erhalten wir aus der Ableitung Informationen über das Monotonieverhalten der Funktion f.

Satz 6.2.6 Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die für alle $x \in (a,b)$ differenzierbar ist.

a) Wenn für alle $x \in (a,b)$ die Ableitung $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) > 0, f'(x) \leq 0, f'(x) < 0$) ist, dann ist f in $[a,b]$ monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend, monoton fallend, streng monoton fallend).

b) Ist f in $[a,b]$ monoton wachsend (bzw. monoton fallend), so folgt $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in (a,b)$.

Beweis. a) Wir nehmen an, es gelte $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$, aber f sei nicht streng monoton wachsend. Das bedeutet es gibt $x_1, x_2 \in [a,b]$ für die gilt $x_1 < x_2$ und $f(x_1) \geq f(x_2)$. Wenden wir nun den Mittelwertsatz (s. Korollar 6.2.5) auf das Intervall $[x_1, x_2]$ an, dann erhalten wir die Existenz eines Punktes $p \in (x_1, x_2)$ für den

$$f'(p) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

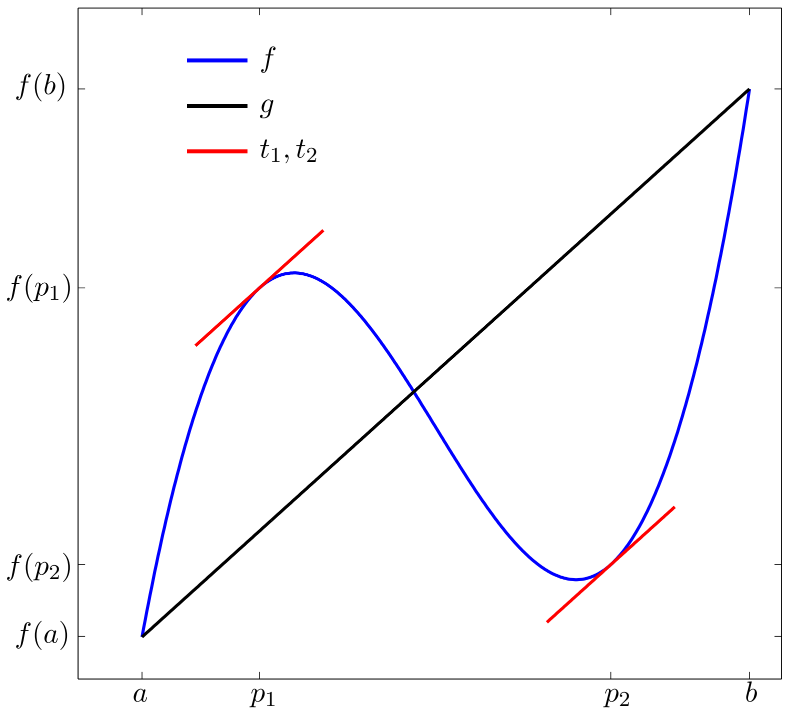

Abbildung 6.3.: Der Graph einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und die Gerade $g : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x - b) + f(b)$, die durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verläuft. Es gibt zwei Punkte $p_1, p_2 \in (a, b)$, deren Tangenten t_1 bzw. t_2 den gleichen Anstieg wie die Gerade g haben.

gilt. Aufgrund der Annahmen $x_1 < x_2$ und $f(x_1) \geq f(x_2)$, folgt dass $f'(p) \leq 0$ ist. Dies steht im Wiederspruch zu $f'(p) > 0$. Also war die Annahme falsch und f muss streng monoton wachsend sein.
Für alle anderen Fälle funktioniert der Beweis analog.

b) Sei f monoton wachsend, dann ist für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ der Differenzenquotient $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$. Durch Bilden des Grenzwertes erhalten wir daher $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$.
Der Beweis für monoton fallende Funktionen ist analog. □

Bemerkung 6.2.7 Aus strenger Monotonie muss nicht immer $f'(x) > 0$, bzw. $f'(x) < 0$ folgen. So ist zum Beispiel die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ streng monoton wachsend, aber es gilt $f'(0) = 0$.
Im Beweis sehen wir das daran, dass für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n > 0$ für den Grenzwert nur $x \geq 0$ gilt.

Satz 6.2.8 Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. In einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ gelte

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0 \quad (\text{bzw. } f''(x_0) < 0).$$

Dann hat f in x_0 ein striktes lokales Minimum (bzw. Maximum).

Beweis. Wir nehmen an, es gelte $f''(x_0) > 0$, das bedeutet, dass der Differenzialquotient

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

ist positiv. Wir haben hier benutzt, dass nach Voraussetzung $f'(x_0) = 0$ ist. Da f zweimal differenzierbar ist, folgt dass $f'(x)$ stetig ist (s. Kor. 6.1.10). Somit ist auch die Funktion

$$F : (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{f'(x)}{x - x_0} & \text{wenn } x \neq x_0 \\ \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} & \text{wenn } x = x_0 \end{cases}$$

stetig und positiv, wenn $\epsilon > 0$ klein genug gewählt ist (s. Kor. 5.3.19). Daraus ergibt sich

$$f'(x) < 0 \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \epsilon, x_0) \quad \text{und} \quad f'(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in (x_0, x_0 + \epsilon).$$

Also ist f auf dem Intervall $(x_0 - \epsilon, x_0)$ streng monoton fallend und auf dem Intervall $(x_0, x_0 + \epsilon)$ streng monoton wachsend. Daraus folgt, dass f im Punkt x_0 ein striktes lokales Minimum hat.
Ist $f''(x_0) < 0$ dann ist der Beweis analog. □

Bemerkung 6.2.9 Die Bedingung $f''(x) \neq 0$ aus Satz 6.2.8 ist hinreichend für die Existenz von Extrema, aber sie ist nicht notwendig. So hat die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4$ ein striktes lokales Minimum in $x_0 = 0$, aber es ist trotzdem $f''(0) = 0$.

Eine wichtige Anwendung des Mittelwertsatzes sind die Regeln von de l'Hospital, die die Berechnung vieler Grenzwerte vereinfachen, für die sonst umständliche Abschätzungen nötig wären.

Lemma 6.2.10 Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

a) Sei $f : (0, a) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow 0} f'(x) = c$$

Dann gilt

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)}{x} = c.$$

b) Sei $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} f'(x) = c$$

Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = c.$$

Beweis. a)

b) Wir nehmen zunächst an, dass $c = 0$ ist. Das heißt es gilt $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Daraus folgt, dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein $x_0 > a$ gibt, sodass für alle $\tilde{x} \geq x_0$ gilt $|f'(\tilde{x})| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Aus dem Mittelwertsatz folgt, dass dann für alle $x \geq x_0$, es ein $\tilde{x} \in (x_0, x)$ gibt mit

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\tilde{x}).$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner erhalten wir daraus, dass für alle $x \geq x_0$ gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = f'(\tilde{x})(x - x_0) \leq \frac{\epsilon}{2}(x - x_0) \leq \frac{\epsilon}{2}x. \tag{6.6}$$

Für alle $x \geq \max\{x_0, \frac{2|f(x_0)|}{\epsilon}\}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{x}\right| &= \left|\frac{f(x) - f(x_0) + f(x_0)}{x}\right| && \mid \text{Einfügen von } 0 = f(x_0) - f(x_0) \\
&\leq \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x}\right| + \left|\frac{f(x_0)}{x}\right| && \mid \text{Dreiecksungleichung} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \left|\frac{f(x_0)}{x}\right| && \mid \text{Abschätzung (6.6), da } x \geq x_0 \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}. && \mid \text{da aus } x \geq 2|f(x_0)|/\epsilon \text{ folgt } \epsilon/2 \geq |f(x_0)/x|
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ gilt.
Ist nun $\lim_{x\to\infty} f'(x) = c$, dann betrachten wir die Funktion $g(x) = f(x) - cx$, für die dann $\lim_{x\to\infty} g'(x) = 0$ ist. Somit folgt aus dem ersten Teil des Beweises, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - c\right) = 0$$

und wir haben die Aussage $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = c$ bewiesen. □

Beispiel 6.2.11 Wir nutzen das Lemma 6.2.10 um zu beweisen, dass $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$. Dafür berechnen wir die Ableitung des Logarithmus und es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \log' x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Satz 6.2.12 (Die Regeln von de l'Hospital)
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, wobei $I = (a, b)$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Es sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und es existiere der Limes

$$\lim_{x\uparrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R}.$$

Dann gelten die Regeln von de l'Hospital:

a) Falls $\lim_{x\uparrow b} f(x) = \lim_{x\uparrow b} g(x) = 0$, dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ sodass $g'(x) \neq 0$ für alle $x \geq x_0$ und es gilt
$$\lim_{x\uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}.$$

b) Falls $\lim_{x\uparrow b} f(x) = \lim_{x\uparrow b} g(x) = \pm\infty$, dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ sodass $g'(x) \neq 0$ für alle $x \geq x_0$ und es gilt
$$\lim_{x\uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Betrachte $f \circ g^{-1}$ und benutze Lemma 6.2.10. □

Zusammengefasst können wir also sagen, dass unter dem Voraussetzungen der Regeln von de l'Hospital
$$\lim_{x\uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\uparrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
gilt.

Bemerkung 6.2.13 i) Die Aussagen des Satzes 6.2.12 gelten auf analoge Art und Weise für den Grenzwert $\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

ii) Sind die Funktionen f und g im Punkt b, für den der Grenzwert berechnet werden soll, definiert und stetig, dann ist
$$\lim_{x\uparrow b} f(x) = f(b) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\uparrow b} g(x) = g(b).$$
Das heißt um die Regel a) von de l'Hospital in dieser Situation anwenden zu können, genügt es zu prüfen, ob $f(b) = g(b) = 0$ gilt.

Beispiel 6.2.14 Wir wollen den Grenzwert
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$
berechnen. Sowohl der Zähler $f(x) = x - \sin x$ als auch der Nenner $g(x) = x \sin x$ sind für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig. Wir überprüfen, daher dass
$$f(0) = 0 - \sin 0 = 0 \quad \text{und} \quad g(0) = 0 \cdot \sin 0 = 0$$
gilt. Somit folgt aus den Regeln von de l'Hospital
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x - x \cos x}$$

Diesen Grenzwert können wir nicht berechnen, aber es sind erneut die Vorraussetzungen der Regeln von de l'Hospital erfüllt. In der Tat sind die Funktionen $\tilde{f}(x) = 1 - \cos x$ und $\tilde{g}(x) = \sin x - x \cos x$ stetig und es gilt

$$\tilde{f}(0) = 1 - \cos 0 = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{g}(0) = \sin 0 - 0 \cdot \cos 0 = 0.$$

Somit folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x - x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tilde{f}'(x)}{\tilde{g}'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{\sin 0}{2\cos 0 - 0 \sin 0} = \frac{0}{2} = 0.$$

Insgesamt haben wir also

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = 0$$

bewiesen.

6.3. Taylorentwicklung

Wir haben mit Satz 6.1.8 bewiesen, dass für Punkte x, die nah genug an x_0 sind, die Tangente

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

eine gute Approximation der eigentlichen Funktion f ist. Genau mit der Funktion f stimmt die Tangente aber nur für $x = x_0$ überein

$$t(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) = f(x_0).$$

Außerdem stimmt die erste Ableitung von f mit der ersten Ableitung der Tangente an x_0 überein

$$t'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0).$$

Wollen wir eine bessere Approximation von f, dann ist es möglich zum Beispiel ein Polynom zweiten Grades zu suchen, sodass auch das Polynom selbst und seine ersten zwei Ableitungen in x_0 mit denen von f übereinstimmen. Da die zweite Ableitung der Tangente null ist, können wir dies erreichen, indem wir zu t einen Ausdruck $\tilde{p}$ addieren, der an x_0 null wird und so dass auch dessen erste Ableitung an x_0 null wird. Dies wird von $\tilde{p}(x) = (x - x_0)^2$ erfüllt, denn es gilt $\tilde{p}(x_0) = 0$ und $\tilde{p}'(x) = 2(x - x_0)$, d.h. $\tilde{p}'(x_0) = 0$. Die zweite Ableitung hingegen berechnet sich zu $\tilde{p}''(x) = 2$. Multiplizieren wir daher $\tilde{p}$ mit $\frac{f''(x_0)}{2}$, dann definieren wir durch

$$g(x) = t(x) + \frac{f''(x_0)}{2}\tilde{p}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

ein Polynom zweiten Grades mit den Ableitungen

$$g'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) \quad \text{und} \quad g''(x_0) = f''(x_0).$$

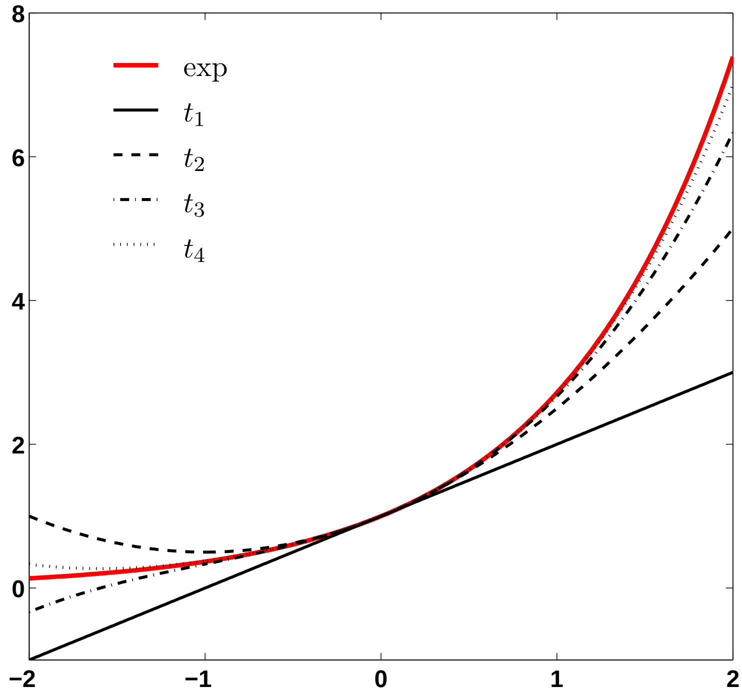

Abbildung 6.4.: Die Exponentialfunktion und ihre Taylorpolynome t_1, t_2, t_3, t_4 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

Somit gilt für $x = x_0$

$$g(x_0) = f(x_0), \quad g'(x_0) = f'(x_0) \quad \text{und} \quad g''(x_0) = f''(x_0).$$

Wir können daher hoffen, dass dieses Polynom die Funktion f besser approximiert, als die Tangente t es tut.
Durch das selbe Vorgehen können wir Polynome beliebigen Grades definieren, deren Ableitungen in x_0 mit denen von f übereinstimmen, die die Approximation noch weiter verbessern.

Definition 6.3.1 Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion, dann heißt

$$t_n(x_0, x) := \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

n-tes **Taylorpolynom** von f um den **Entwicklungspunkt** $x_0 \in (a,b)$.
Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbar, dann heißt

$$t_\infty(x_0, x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

die **Taylorreihe** von f um den **Entwicklungspunkt** $x_0 \in (a,b)$.

Lemma 6.3.2 Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in (a,b)$. Dann gilt für das n-te Taylorpolynom

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} t_n(x_0,x)|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x_0)$$

für $k = 0, \dots, n$.

Beweis. Die k-te Ableitung eines Polynoms n-ten Grades ist ein Polynom vom Grad $n-k$, da durch jedes Mal Ableiten der Grad um eins kleiner wird. Wir können direkt nachrechnen, dass die erste Ableitung des Taylorpolynoms $t_n(x_0,x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$ durch

$$\frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}x^1} t_n(x_0,x) = \sum_{i=1}^n i \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^{i-1} = \sum_{i=1}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{(i-1)!}(x-x_0)^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i+1)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

gegeben ist. Also berechnet sich die k-te Ableitung zu

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} t_n(x_0,x) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{f^{(i+k)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i.$$

Setzen wir $x = x_0$ ein, dann erhalten wir $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} t_n(x_0,x_0) = f^k(x_0)$, da alle anderen Summanden zu null werden. $\square$

Beispiel 6.3.3 Die Ableitung der Exponentialfunktion ist wieder die Exponentialfunktion, also gilt für die k-te Ableitung

$$\exp^{(k)}(x) = \exp(x).$$

Wollen wir die Taylorreihe der Exponetialfunktion um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ bestimmen, dann erhalten wir aufgrund von $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$

$$t_\infty(0,x) := \sum_{k=0}^\infty \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} x^k$$

Die Taylorreihe der Exponentialfunktion ist also gleich der Exponentialreihe.

Beispiel 6.3.4 Für die Ableitung der Funktion $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt folgendes

$$\sin' x = \cos x, \quad \sin'' x = -\sin x, \quad \sin''' x = -\cos x, \quad \sin^{(iv)} x = \sin x, \quad \text{usw.}$$

Setzen wir nun den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ein dann erhalten wir:

$$\sin^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } k \text{ gerade} \\ 1 & \text{wenn } k \equiv 1 \mod 4 \\ -1 & \text{wenn } k \equiv 3 \mod 4 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } k \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} & \text{wenn } k \text{ ungerade} \end{cases} \tag{6.7}$$

Also ist die Taylorreihe des Sinus um den Entwicklungspunkt 0 gegeben durch

$$\begin{aligned}
t_\infty(0,x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k \\
&= \sum_{k=0, k \text{ gerade}}^{\infty} \frac{0}{k!} x^k + \sum_{k=1, k \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k!} x^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir dabei genutzt, dass die Menge der ungeraden Zahlen durch $\{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ gegeben ist und haben deshalb $k = 2n+1$ gesetzt.
Die Taylorreihe des Sinus um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ entspricht also der Reihendarstellung des Sinus.

In den letzten beiden Beispielen konvergierte die Taylorreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ und entsprach genau der urspünglichen Funktion für alle $x \in \mathbb{R}$. Das muss allerdings nicht immer der Fall sein.
Bevor wir uns hier allerdings mit der Frage beschäftigen wollen, für welche x die Taylorreihe einer Funktion gleich der Funktion ist und wie gut das n-te Taylorpolynom bereits die Funktion approximiert, wollen wir etwas ausholen und uns zunächst mit der Konvergenz von Funktionenfolgen beschäftigen.

Definition 6.3.5 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ Funktionen. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert **punktweise** gegen $f : D \to \mathbb{R}$, wenn für alle $x \in D$ und für alle $\epsilon > 0$ es ein $N = N(\epsilon, x)$ gibt, sodass

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Für jedes feste $x \in D$ ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Definition punktweiser Konvergenz sagt also, dass diese Folge gegen die Zahl $f(x)$ konvergiert (s. Def. 3.2.3).

Beispiel 6.3.6 i) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine unedlich oft differenzierbare Funktion, dann konvergiert die Folge der Taylorpolynome $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ mindestens für $x = x_0$ punktweise gegen die Taylorreihe $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$. Ob dies auch für andere x der Fall ist hängt von der Funktion f ab.

ii) Die Folge von Funktionen

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1 - x^n$$

konvergiert punktweise gegen die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{wenn } x = 1. \end{cases}$$

Im Beispiel 6.3.6ii) haben wir gesehen, dass eine Folge von Polynomen, also stetigen, unendlich oft differenzierbaren Funktionen, gegen eine unstetige Funktion konvergiert. Dies ist eine sehr ungünstige Eigenschaft, da wir gerne hätten, dass sich idealerweise Eigenschaften der Funktionen f_n auch auf die Grenzfunktion f übertragen.
Dies können wir durch die stärkere Forderung der gleichmäßigen Konvergenz erreichen.

Definition 6.3.7 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ Funktionen. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert **gleichmäßig** gegen $f : D \to \mathbb{R}$, wenn für alle $\epsilon > 0$ es ein $N = N(\epsilon)$ existiert, sodass

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ und } n \geq N.$$

Der wesentliche Unterschied zwischen beiden Definitionen besteht darin, dass das N bei punktweiser Konvergenz von x abhängen darf, wohingegen es bei gleichmäßiger Konvergenz für alle x gleich sein muss.

Beispiel 6.3.8 Wir kommen noch einmal auf die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Beispiel 6.3.6 zurück und zeigen per Wiederspruch, dass sie nicht gleichmäßig gegen f konvergiert. Wir berechnen die Differenz

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n & \text{wenn } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{wenn } x = 1. \end{cases}$$

Sei ein $\epsilon > 0$ gegeben. Wir nehmen an dieses ϵ sei kleiner als 1. Angenommen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen f, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $x^n < \epsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Aufgrund von $x \in [0,1]$ und $n \geq N$ gilt $x^n \leq x^N$, das heißt es muss N so gewählt sein, dass $x^N < \epsilon$ für alle $x \in [0,1]$ gilt. Da aber

$$x^N < \epsilon \Longleftrightarrow x < \sqrt[N]{\epsilon}$$

und $\epsilon < 1$ angenommen wurde, ist auch $\sqrt[N]{\epsilon} < 1$. Also war die Annahme es gelte $x^n < \epsilon$ für $x \in (\sqrt[N]{\epsilon}, 1)$ falsch. Für x nah an 1 ist die Konvergenz viel langsamer, als für x nah an 0 (s. Abbildung 6.5). Aus diesem Grund finden wir kein N, dass für alle $x \in [0,1]$ geeignet ist.

Verkleinern wir hingegen den Definitionsbereich auf ein Intervall der Form $[0,a]$ mit $0 < a < 1$, dann ist die Funktionenfolge $g_n : [0,a] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1-x^n$ gleichmäßg konvergent gegen die Funktion $g : [0,a] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$. Zu einem vorgegebenen ϵ muss N so groß gewählt werden, dass $a < \sqrt[N]{\epsilon}$ ist.

Satz 6.3.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f stetig.

Beweis. Wir haben aufgrund der Voraussetzungen zwei Informationen:

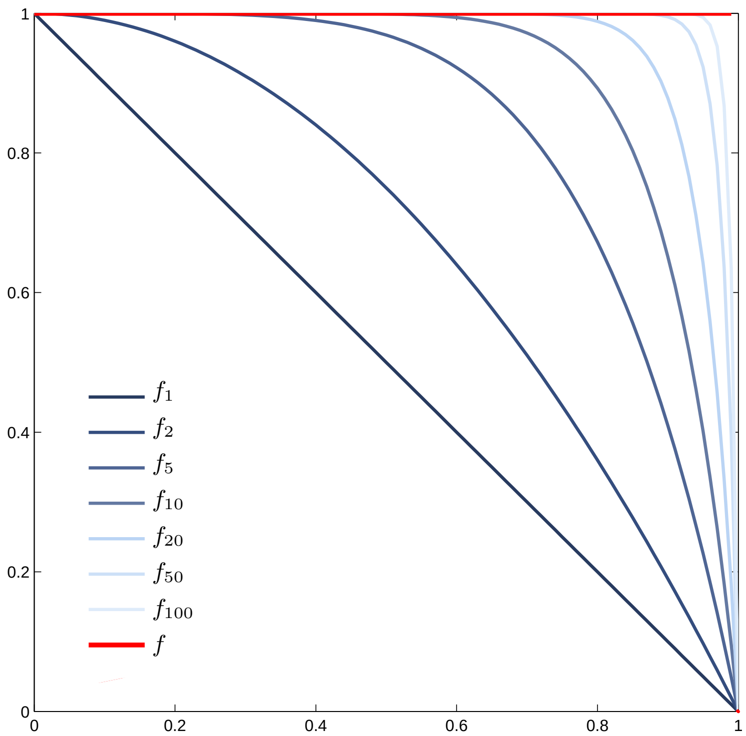

Abbildung 6.5.: Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(x) = 1 - x^n$ konvergiert punkteweise gegen die unstetige Grenzfunktion f. Je näher x an 1 ist, um so langsamer ist die Konvergenz.

1. Die Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig, das heißt zu einem vorgegebenen $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ sodass
$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{6.8}$$
für alle $x \in D$ und für alle $n \geq N$ gilt.

2. Die Funktionen f_n sind stetig. Das heißt zu vorgegebenen $x \in D$ und $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ sodass
$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{6.9}$$
für alle $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$.

Dies wollen wir nutzen um die ϵ-δ-Stetigkeit von f zu beweisen. Dazu sei $x \in D$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben, dann gibt es ein $\delta > 0$ aus 2.) sodass für alle $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| && \mid \text{Addition von } 0 \\
&\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| && \mid \text{Dreiecksungleichung} \\
&< \frac{\epsilon}{3} + |f_n(x) - f_n(y)| + \frac{\epsilon}{3} && \mid \text{gleichmäßige Konvergenz (6.8)} \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon && \mid \text{Stetigkeit von } f_n \text{ (6.9)}
\end{aligned}$$

Dabei wurde das n so groß gewählt, dass Gleichung (6.9) gilt. $\square$

Können wir also beweisen, dass die Konvergenz der Taylorpolynome gegen die Taylorreihe gleichmäßig ist, dann wissen wir, dass die Grenzfunktion stetig ist.

Definition 6.3.10 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $x_0 \in \mathbb{R}$. Wie bezeichnen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

als **Potenzreihe**.

Analog zur Definition einer Reihe, ist eine Potenzreihe eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wobei $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$. Wir bezeichnen mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ einerseits die Folge, aber auch andererseits deren Grenzwert, sofern er existiert.

Jede Potenzreihe konvergiert für $x = x_0$, den Entwicklungspunkt, denn dort gilt

$$f(x_0) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x_0 - x_0)^k = a_0 \in \mathbb{R}.$$

Uns interessiert daher, ob sie auch für $x \neq x_0$ konvergiert und welche Eigenschaften dann die Grenzfunktion hat. Dies ist relevant, da jede Taylorreihe eine Potenzreihe ist.

Satz 6.3.11 Sei die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ gegeben. Wenn die Reihe für ein $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_0$ konvergiert, dann konvergiert $f(x)$ auf dem Intervall $[x_0 - r, x_0 + r]$ gleichmäßig und absolut, wobei $0 < r < |x_1 - x_0|$ ist.
Die formal abgeleitete Potenzreihe $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x - x_0)^{k-1}$ konvergiert ebenfalls absolut und gleichmäßig auf $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Definition 6.3.12 Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ eine Potenzreihe, dann heißt

$$R = \sup\{|x - x_0| \;\Big|\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \text{ konvergiert}\}$$

Konvergenzradius von f.
Das Intervall $(x_0 - R, x_0 + R)$ heißt **Konvergenzintervall**.

Korollar 6.3.13 Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius R, dann konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig auf Intervallen $[x_0 - r, x_0 + r]$ für alle $r < R$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 6.3.11. Denn für $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ gibt es immer ein x_1 mit $r < |x_1 - x_0| < R$, so dass $f(x_1)$ konvergiert. □

Der Konvergenzradius wurde als *Supremum* aller Radien um den Entwicklungspunkt x_0 definiert. Das heißt, dass die Potenzreihe für $x = x_0 \pm R$ konvergieren kann, aber nicht

muss. Die Konvergenz auf dem Rand des Konvergenzintervalls muss daher immer gesondert untersucht werden.
Es ist außerdem zu beachten, dass Potenzreihen auf $(x_0 + R, x_0 + R)$ punktweise konvergieren. Gleichmäßig konvergieren sie aber nur auf Intervallen $[x_0-r, x_0+r]$ für ein $0 < r < R$.

Wir wollen jetzt einige Beispiel betrachten und dabei insbesondere untersuchen, ob die Potenzreihen auf dem Rand ihres Konvergenzintervalls konvergieren.

Beispiel 6.3.14

i) Die Exponentialreihe $\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ hat den Konvergenzradius $R = \infty$, denn sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ (s. Lemma 4.5.2). Daraus folgt, dass sie auf allen Intervallen $[-r, r]$ mit $0 < r < \infty$ gleichmäßig konvergiert. Auf ganz $\mathbb{R}$ hingegen ist die Konvergenz nicht gleichmäßig.

ii) Die geometrische Reihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^n$ hat den Konvergenzradius $R = 1$, da die Reihe für alle $x \in (-1, 1)$ konvergiert (s. Beispiel 4.4.7). Für $x = 1$ ist $f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$, also konvergiert die Reihe dort nicht. Ebenso konvergiert die Reihe $f(-1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n$ nicht.

Beispiel 6.3.15 Für viele Potenzreihen kann man den Konvergenzradius mithilfe des Quotienten- oder Wurzelkriteriums (s. Korollar 4.4.13 und 4.4.14) berechnen.

i) Zum Beispiel hat die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ den Konvergenzradius $R = 1$. Um dies zu sehen setzen wir $a_n = \frac{x^n}{n}$ und berechnen

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n+1}x^{n+1}}{\frac{1}{n}x^n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}|x| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}|x| = |x|\,.$$

Aus dem Quotientenkriterium folgt nun, dass die Reihe für $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| < 1$ konvergiert und für $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| > 1$ divergiert. Für $|x| = 1$ kann keine Aussage getroffen werden, da in diesem Fall zwar $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1$, aber $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ gilt.
Deshalb betrachten wir die Reihe noch einmal für $x = 1$ und $x = -1$. Wir sehen, dass $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ die harmonische Reihe liefert, also divergiert (s. Bsp. 4.4.8). Auf der anderen Seite ist $f(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^n$ die alternierende harmonische Reihe und somit konvergent (s. Bsp. 4.4.21). Das Verhalten der Potenzreihe unterscheidet sich also auf beiden Randpunkten des Konvergenzintervalls.

ii) Nun betrachten wir die Potenzreihe

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n.$$

Wir setzen $a_n = \frac{x^n}{n^2}$ und berechnen

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{n^2}{(n+1)^2} \frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2}|x| = |x|.$$

Wie im vorherigen Beispiel folgt auch hier aus dem Quotientenkriterium die Konvergenz der Reihe für $|x| < 1$ und die Divergenz für $|x| > 1$, also hat diese Reihe den Konvergenzradius $R = 1$. Nun betrachten wir die Punkte $x = \pm 1$ auf dem Rand des Konvergenzinterfalls und stellen fest, dass

$$g(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{und} \quad g(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

gilt. Beide Reihen konvergieren. Die Konvergenz von $g(1)$ wurde in Beispiel 4.4.17 untersucht. Die Konvergenz von $g(-1)$ folgt entweder aus dem Leibnizkriterium oder aus der Tatsache, dass

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = g(1)$$

gilt.

iii) Zum Schluß wollen wir noch die Potenzreihe

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^5 5^n x^n$$

untersuchen. Wir setzen $a_n = n^5 5^n x^n$ und berechnen wieder

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \limsup_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)^5}{n^5} \frac{5^{n+1}}{5^n} \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \limsup_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^5 5\,|x| = 5\,|x| \, .$$

Aus dem Quotientenkriterium folgt die Konvergenz der Reihe, wenn $5\,|x| < 1$, also $|x| < \frac{1}{5}$ gilt und die Divergenz für $5\,|x| > 1$, also $|x| > \frac{1}{5}$. Das heißt der Konvergenzradius liegt bei $R = \frac{1}{5}$. Für die Punkte x mit $|x| = \frac{1}{5}$ konvergiert die Potenzreihe ebenfalls nicht, denn dort gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left(\frac{n+1}{n} \right)^5 5 \cdot \frac{1}{5} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^5 > 1.$$

Nach dem Quotientenkriterium folgt die Divergenz.

Satz 6.3.16 Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ stetig differenzierbare Funktionen, die punktweise gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergieren. Wenn die Folge der Ableitungen $f_n' : [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert, dann ist die Grenzfunktion f differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x)$$

für alle $x \in [a,b]$.

Korollar 6.3.17 Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$, dann gilt für alle $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$$

Beweis. In Satz 6.3.11 wurde gezeigt, dass die formale Ableitung einer Potenzreihe für alle $r < R$ auf dem Intervall $[x_0 - r, x_0 + r]$ gleichmäßig konvergiert. Da die Potenzreihe selbst auf solchen Intervallen konvergiert, sind die Voraussetzungen von Satz 6.3.16 erfüllt und wir erhalten die gewünschte Aussage. □

Beispiel 6.3.18

i) Wir betrachten die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ und berechnen die Ableitung

$$\exp' x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{\tilde{k}=0}^{\infty} \frac{1}{\tilde{k}!} x^{\tilde{k}}.$$

Im letzten Schritt wurde hier $\tilde{k} = k - 1$ gesetzt, wodurch sich der Anfang der Summation von $k = 1$ zu $\tilde{k} = 1 - 1 = 0$ verschoben hat.
Diese Rechnung bestätigt das bekannte Tatsache aus Bsp. 6.1.5 v), dass die Ableitung der Exponentialfunktion wieder die Exponentialfunktion ist.

ii) Wir können diese Regel auch benutzen um gewisse Grenzwerte von Reihen zu berechnen. So gilt zum Beispiel für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n x^n &= x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Korollar 6.3.19 Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe die für alle $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ konvergiert. Dann ist f beliebig oft differenzierbar und es gilt

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

Beweis. Wir berechnen die n-te Ableitung der Potenzreihe und erhalten

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) a_k (x-x_0)^{k-n}.$$

Setzen wir $x = x_0$ dann fallen alle Terme mit $k - n > 0$ weg und es bleibt nur der erste Term für den $k = n$ gilt übrig. Somit gilt

$$f^{(n)}(x_0) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot a_n = n!a_n. \qquad \square$$

Haben wir also eine Funktion $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$, die durch eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ definiert ist, dann ist die Taylorreihe dieser Funktion um den Entwicklungspunkt x_0 gleich der Potenzreihe, denn nach dem Korollar 6.3.19 ist $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$ und somit ist die Taylorreihe durch

$$t_\infty(x_0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!a_n}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

gegeben.

Da jede Taylorreihe eine Potenzreihe ist, können wir wie in Beispiel 6.3.15 untersuchen, ob sie konvergiert und für welche $x \in \mathbb{R}$ sie konvergiert. Allerdings können damit noch nicht die Frage klären, ob die Taylorreihe von f in ihrem Konvergenzintervall auch gleich der Funktion f ist. Diese Frage können wir erst beantworten, wenn wir das Restglied betrachten.

Satz 6.3.20 Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine $(n + 1)$-mal stetig differenzierbare Funktion und $t_n(x_0, \cdot)$ ihr n-tes Taylorpolynom um den Entwicklungspunkt $x_0 \in (a, b)$.
Dann gibt es zu jedem $x \in (a, b)$ ein ξ, das zwischen x und x_0 liegt, so dass gilt:

$$R_{n+1}(x_0, x) = f(x) - t_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Dies wird als **Lagrange**-Restglied bezeichnet.

Beweis. Der Beweis dieses Satzes basiert auf dem Mittelwertsatz (s. Kor. 6.2.5). Für $n = 0$ ist das Taylorpolynom konstant und durch $t_0(x, x_0) = f(x_0)$ gegeben. Aus dem Mittelwertsatz folgt nun die Existenz eines ξ das zwischen x und x_0 liegt und für das gilt

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = R_1(x, x_0).$$

Ist nun die Funktion f $n + 1$ mal stetig differenzierbar, dann ist $f^{(n)}$ stetig differenzierbar und wir können darauf den den Mittelwertsatz anwenden. Es gibt also ein ξ zwischen x und x_0, für das gilt

$$f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0) = f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0). \qquad \square$$

Die Differenz von Funktion und n-tem Taylorpolynom berechnet sich also wie der $n + 1$-te Term der Taylorreihe, mit dem Unterschied, dass statt des Entwicklungspunkts x_0 ein Wert zwischen x und x_0 in die Ableitung eingesetzt wird.

Können wir nun zeigen, dass für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < R$ das Restglied $R_{n+1}(x_0, x)$ für $n \to \infty$ gegen null konvergiert, dann bedeutet dies, dass die Taylorreihe $t_\infty(x_0, x)$ konvergiert und gleich der ursprünglichen Funktion f ist.

Satz 6.3.21 (Taylorentwicklung)
Sei (a,b) ein beschränktes Intervall und $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit gleichmäßig beschränkten Ableitungen, das heißt es gibt ein $M<\infty$, so dass für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$\sup_{x\in(a,b)}\left|f^{(n)}(x)\right|\le M.$$

Dann konvergiert für alle $x,x_0\in(a,b)$ die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt x_0 und es gilt

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Beweis. Wir zeigen, dass die Folge der Taylorpolynome gleichmäßig gegen f konvergiert. Sei $x,x_0\in(a,b)$ gegeben, dann gibt es ein ξ zwischen x und x_0 (s. Satz 6.3.20) so dass gilt

$$\begin{aligned}|f(x)-t_n(x_0,x)| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\\ &= \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\\ &\le \frac{M}{(n+1)!}|a-b|^{n+1}\end{aligned}$$

Da die Folge $a_n=\frac{|a-b|^n}{n!}$ eine Nullfolge ist, gibt es zu jedem $\epsilon>0$ ein $N_\epsilon\in\mathbb{N}$, sodass für alle $n\ge N_\epsilon$ gilt

$$|f(x)-t_n(x_0,x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|a-b|^{n+1}<\epsilon.$$

Dies zeigt die Gleichheit von Taylorreihe und der Funktion f. □

Beispiel 6.3.22 Wir betrachten eine Polynomfunktion

$$p:[-R,R]\to\mathbb{R}, x\mapsto p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0.$$

Die Ableitungen können wir mithilfe der Regel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^k=kx^{k-1}$ berechnen und erhalten

$$\begin{aligned}p'(x)&=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1,\\ p''(x)&=n(n-1)a_nx^{n-2}+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+\cdots+2a_2\\ p^{(n)}(x)&=n!a_n\end{aligned}$$

Alle höheren Ableitungen sind null. Da nun die Ableitungen von Polynomen wieder Polynome sind und somit stetig, nehmen Sie auf beschränkten Intervallen $[-R,R]$ ihr Minimum und Maximum an. Daher gilt

$$\sup_{x\in[-R,R]}\left|f^{(k)}(x)\right|\le M<\infty$$

für ein $M>0$. Nach Satz 6.3.21 konvergiert die Taylorreihe also für alle Entwicklungspunkte $x_0\in[-R,R]$. Insbesondere erhalten wir für $x_0=0$, die folgenden Ableitungen

$$p'(0)=a_1,\quad p''(0)=2a_2,\quad\ldots\quad p^{(n)}(0)=n!a_n.$$

Somit ist die Taylorreihe gleich dem Polynom.
Dies ist auch für Entwicklungspunkte $x_0 \neq 0$ der Fall und wir können durch

$$p(x) = p(x - x_0 + x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k\big((x - x_0) + x_0\big)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x - x_0)^i x_0^{k-i}$$

die Taylorreihe angeben.

Die Vorraussetzung aus Satz 6.3.21, dass die Ableitungen gleichmäßig sind, ist sehr stark. Es ist aber auch möglich, dass eine Taylorreihe gegen die Funktion f konvergiert, wenn diese Vorraussetzungen nicht erfüllt sind. In dieser Situation ist es notwendig die Restglieder zu untersuchen und zu zeigen, dass sie für $n \to \infty$ gegen null konvergieren.

Beispiel 6.3.23 Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin^2(x),$$

von der wir die Taylorreihe berechnen wollen. Dazu bemerken wir, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$ sich die Ableitung von f durch folgende Formel berechnen läßt:

$$f^{(2k-1)}(x) = (-1)^{k-1} 2^{2k-1} \cos x \sin x \quad \text{und} \quad f^{(2k)}(x) = (-1)^{k-1} 2^{2k-1} (1 - 2\sin^2 x).$$

Diese Formel können wir mithilfe vollständiger Induktion beweisen. Für den Induktionsanfang bei $k = 1$ benutzen wir die Kettenregel und erhalten

$$f^{(1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin^2(x) = 2\cos x \sin x = (-1)^{1-1} 2^{2-1} \cos x \sin x.$$

Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, dass die Formel für ein k stimmt und müssen nun zeigen, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(2k-1)}$ durch die Formel für $f^{(2k)}$ gegeben ist. Außerdem müssen wir zeigen dass die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(2k)}$ durch die Formel für $f^{(2k+1)}$ gegeben ist.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(2k-1)}(x) &= (-1)^{k-1} 2^{2k-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x \sin x \\
&= (-1)^{k-1} 2^{2k-1} \big(\cos^2 x - \sin^2 x\big) \\
&= (-1)^{k-1} 2^{2k-1} \big(1 - 2\sin^2 x\big) \\
&= f^{(2k)}(x).
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Produktregel und die Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ benutzt.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(2k)}(x) &= (-1)^{k-1} 2^{2k-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \big(1 - 2\sin^2 x\big) \\
&= (-1)^{k-1} 2^{2k-1} \big(-4\cos x \sin x\big) \\
&= (-1)^{k-1+1} 2^{2k-1+2} \cos x \sin x \\
&= f^{(2k+1)}(x).
\end{aligned}$$

Um nun die Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ zu bestimmen, setzen wir den Entwicklungspunkt in die Ableitung ein und erhalten

$$f^{(2k-1)}(0) = (-1)^{k-1} 2^{2k-1} \cos 0 \sin 0 = 0$$

und

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^{k-1}2^{2k-1}(1 - 2\sin^2(0)) = (-1)^{k-1}2^{2k-1}.$$

Dabei ist zu beachten, dass diese Formel nur für $k \geq 1$ gelten. Die nullte Ableitung hingegen ist durch $f^{(0)}(0) = f(0) = \sin^2(0) = 0$ gegeben.

Die Taylorreihe berechnet sich daher zu

$$t_\infty(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}.$$

Um die Frage zu klären **ob** diese Reihe konvergiert, bzw. genauer: wie ihr Konvergenzradius ist, benutzen wir das Wurzelkriterium. Dafür setzen wir

$$a_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k} \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = 0.$$

und berechnen

$$\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \sqrt[2k]{\frac{2^{2k}}{2(2k)!}|x|^{2k}} = \frac{2}{\sqrt[2k]{2(2k)!}}|x|.$$

Da $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!} = \infty$ erhalten wir dadurch

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2k]{2}\,\sqrt[2k]{(2k)!}} 2|x| = 0.$$

Da $0 < 1$ ist, folgt dass die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Als nächstes wollen wir klären, ob die Taylorreihe der Funktion f gleich der Funktion ist. Dazu betrachten wir das $n+1$-te Restglied

$$|R_{2n+2}(x)| = \left|(-1)^k \frac{2^{2k+1}}{(2k+2)!}(1 - \sin^2(\xi))x^{2n+2}\right| = \frac{2^{2k+1}}{(2k+2)!}x^{2k+2}$$

Für $n \to \infty$ konvergiert dies gegen null. Somit ist für alle $x \in \mathbb{R}$ die Taylorreihe gleich der Funktion f.

Eine alternative Möglichkeit dies zu zeigen, besteht darin die Funktion f mithilfe des Additionstheorems des Cosinus (s. Satz 5.6.15) umzuschreiben. Es gilt

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x),$$

und somit erhalten wir unter Verwendung der Reihendarstellung des Cosinus (s. Satz 5.6.17):

$$
\begin{aligned}
\sin^2(x) &= \frac{1}{2}(1-\cos(2x)) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\left((-1)^0\frac{(2x)^0}{(0)!}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}\right)\right) \\
&= (-1)2^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}x^{2k}}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}x^{2k}}{(2k)!}
\end{aligned}
$$

Beispiel 6.3.24 Wir betrachten die Funktion

$$f:[-1,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Mit vollständiger Induktion können wir beweisen, dass sich die n-te Ableitung der Funktion durch folgende Formel berechnen läßt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n(n+1)!\frac{1}{(1+x)^{2+n}}. \tag{6.10}$$

Wir wählen $n=0$ als Induktionsanfang und sehen sofort, dass gilt

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = (-1)^0 1!\frac{1}{(1+x)^{2+0}} = f^{(0)}(x).$$

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, die Formel (6.10) gelte für ein $n\in\mathbb{N}$ und zeigen durch Ableiten, dass sie auch für $n+1$ stimmt

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{(n)}(x) &= (-1)^n(n+1)!\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x)^{-(2+n)} \\
&= (-1)^n(n+1)!(-1)(n+2)(1+x)^{-(2+n)-1} \\
&= (-1)^{n+1}(n+2)!\frac{1}{(1+x)^{2+(n+1)}} \\
&= f^{(n+1)}(x)
\end{aligned}
$$

Wir wollen nun die Taylorreihe $t_\infty(x_0,x)$ von f um den Entwicklungspunkt $x_0=0$ bestimmen. Dafür setzen wir x_0 in die obige Formel ein und erhalten

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n(n+1)!\frac{1}{(1)^{2+n}} = (-1)^n(n+1)!.$$

Die Taylorreihe berechnet sich daher zu

$$t_\infty(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)!}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n.$$

Für $x \in (-1,1)$ ist die n-te Ableitung von f nicht gleichmäßig beschränkt, denn es gilt: $\lim_{n\to\infty} |f^{(n)}(x)| = \infty$. Trotzdem konvergiert die Taylorreihe in diesem Intervall.
Um dies zu sehen, benutzen wir, dass $f(x) = \left(\frac{1}{1-(-x)}\right)^2$ gilt. Für x mit $|x| < 1$ gilt mithilfe der geometrischen Reihe (wo wir x durch $-x$ ersetzt haben)

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Um das Cauchy-Produkt dieser Reihe mit sich selbst zu berechnen, benötigen wir

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k (-1)^{n-k} x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n x^n = (-1)^n (n+1) x^n.$$

Also gilt

$$\left(\frac{1}{1-(-x)}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n.$$

Da die geometrische Reihe für $|x| < 1$ absolut konvergiert, konvergiert auch das Cauchy-Produkt für diese x absolut (s. Satz 4.4.25). Da diese Reihe gleich der Taylorreihe ist folgt daraus die Konvergenz der Taylorreihe.

6.4. Das Newton-Verfahren

In diesem Abschnitt wollen wir noch einmal zu den Rekursionsgleichungen zurückkehren und insbesondere das Newton-Verfahren kennenlernen, mit dem wir Nullstellen von Funktionen rekursiv berechnen können.

Wir haben in Abschnitt 5.4 den Fixpunktsatz 5.4.5 kennengelernt, der uns Voraussetzungen liefert unter denen die Lösung $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Rekursionsgleichung $x_{n+1} = f(x_n)$ immer gegen einen Grenzwert, den Fixpunkt $\bar{x} = f(\bar{x})$ konvergiert. Etwas mühselig war es in diesem Kontext die Voraussetzung, dass f eine Kontraktion ist zu prüfen. Der folgende Satz erleichtet dies für differenzierbare Funktionen.

Satz 6.4.1 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und für alle $x \in (a,b)$ differenzierbar. Wenn es ein $L \in \mathbb{R}, L < \infty$ gibt sodass gilt

$$\sup_{x\in(a,b)} \left|f'(x)\right| = L,$$

dann ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L.

Beweis. Seien $x, y \in [a,b]$ gegeben. Nach dem Mittelwertsatz (s. Korollar 6.2.5) gibt es ein $p \in (x,y)$ sodass

$$f'(p) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

gilt. Durch Multiplikation mit dem Nenner und Benutzen der Voraussetzung erhalten wir daher

$$|f(x) - f(y)| = \left|f'(p)\right| |x-y| \le L\,|x-y|\,. \qquad \square$$

Satz 6.4.2 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) stetig differenzierbar. Sei $\bar{x} \in (a, b)$ eine Fixpunkt von f, das heißt eine Lösung der Gleichung $\bar{x} = f(\bar{x})$, für den $|f'(\bar{x})| < 1$ gilt. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass für alle Anfangswerte $x_0 \in (\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$ die Lösung der Rekursionsgleichung

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

gegen $\bar{x}$ konvergiert.

Beweis. Wir wollen für diesen Beweis Satz 5.4.5 benutzen. Dafür müssen wir zeigen, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so $f : (x - \epsilon, \bar{x} + \epsilon) \to \mathbb{R}$ eine kontraktive Selbstabbildung ist.
Da die Ableitung f' stetig ist und $|f'(\bar{x})| < 1$ ist, gibt es ein $\epsilon_1 > 0$, sodass $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in (x - \epsilon_1, \bar{x} + \epsilon_1)$. Um dies zu sehen, wenden wir Korollar 5.3.19 auf die Funktion $g(x) = |f(x)| - 1$ an.
Nun müssen wir noch beweisen, dass es ein $\epsilon_2 > 0$ gibt, sodass $f : (x - \epsilon_2, \bar{x} + \epsilon_2) \to \mathbb{R}$ eine Selbstabbildung ist, also $f\big((x - \epsilon_2, \bar{x} + \epsilon_2)\big) \subseteq (x - \epsilon_2, \bar{x} + \epsilon_2)$ gilt. Aufgrund von Satz 6.1.8 gibt es eine Funktion $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ für die $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{\varphi(x)}{x - \bar{x}} = 0$ gilt, sodass wir f schreiben können als

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \varphi(x). \tag{6.11}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
|f(x) - \bar{x}| &= |f(x) - f(\bar{x})| && \mid \text{Definition Fixpunkt } f(\bar{x}) = \bar{x} \\
&= \big|f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \varphi(x)\big| && \mid \text{Gleichung (6.11)} \\
&= \left|f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{\varphi(x)}{x - \bar{x}}(x - \bar{x})\right| && \mid \text{Einfügen von } 1 = \frac{x - \bar{x}}{x - \bar{x}} \\
&= \left(\big|f'(\bar{x})\big| + \left|\frac{\varphi(x)}{x - \bar{x}}\right|\right) |x - \bar{x}| && \mid \text{Ausklammern von } x - \bar{x}
\end{aligned}$$

Da $|f'(\bar{x})| < 1$ und $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{\varphi(x)}{x - \bar{x}} = 0$, gibt es ein $\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon_1 > \epsilon > 0$, sodass für $x \in (x - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$ gilt

$$\big|f'(\bar{x})\big| + \left|\frac{\varphi(x)}{x - \bar{x}}\right| < 1.$$

Aufgrund der obigen Rechnung ist daher für $x \in (x - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$

$$|f(x) - \bar{x}| < |x - \bar{x}|\,.$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Tatsache, dass für $|x - \bar{x}| < \epsilon$ auch $|f(x) - \bar{x}| < \epsilon$ ist. Anders formuliert: aus $x \in (x - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$ folgt, dass $f(x) \in (x - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$ liegt.
Aus dem bisher gezeigten folgt, dass $f : (x - \epsilon, \bar{x} + \epsilon) \to \mathbb{R}$ eine kontraktive Selbstabbildung ist. Somit können wir Satz 5.4.5 folgt die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, für deren Folgenglieder $x_0 \in (x - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$ und $x_{n+1} = f(x_n)$ gilt, gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt $\bar{x}$. □

Die Aussage dieses Satz beinhaltet das Prinzig der Linearisierung. Dieses besagt, dass sich unter gewissen Voraussetzungen, das Verhalten der Rekursionsgleichung $x_{n+1} = f(x_n)$ für Anfangswerte nah genug am Fixpunkt $\bar{x}$, gut durch das Verhalten der linearisierten Rekursionsgleichung

$$x_{n+1} = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \tag{6.12}$$

beschreiben läßt. Die lineare Gleichung (6.12) hat den Fixpunkt $\bar{x}$, da aufgrund der Voraussetzung $f'(\bar{x}) \neq 1$, dies die einzige Lösung von

$$x = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) = \bar{x} + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \quad \Rightarrow \quad 0 = (f'(\bar{x}) - 1)(x - \bar{x})$$

ist. Die lineare Abbildung $g(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$ ist aufgrund von $|f'(\bar{x})| < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Kontraktion (s. Beispiel 5.4.2) und es gilt $g(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Nach dem Fixpunktsatz konvergiert also für jeden Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}$ die Lösung $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Gleichung (6.12) gegen $\bar{x}$.

Beispiel 6.4.3 Wir betrachten die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto rx(1-x)$ für einen Parameter $r > 0$. Zunächst berechnen wir die Fixpunkte dieser Gleichung. Es gilt für die Fixpunkte

$$\bar{x} = r\bar{x}(1 - \bar{x})$$

also ist $\bar{x}_1 = 0$ ein Fixpunkt. Der zweite Fixpunkt erfüllt $1 = r(1 - \bar{x})$ und berechnet sich somit zu $\bar{x}_2 = 1 - \frac{1}{r} = \frac{r-1}{r}$. Dieser Fixpunkt liegt nur für $r \geq 1$ im Intervall $[0,1]$. Für $r > 1$ ist $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$.
Nun berechnen wir die Ableitung von f und setzen die Fixpunkte ein. Es gilt

$$f'(x) = r(1 - 2x)$$

und somit

$$f'(\bar{x}_1) = r \quad \text{und} \quad f'(\bar{x}_2) = r(1 - 2\frac{r-1}{r}) = r - 2(r-1) = 2 - r.$$

Für $0 < r < 1$ konvergiert die Lösung der Rekursionsgleichung für Anfangswerte nah an null gegen $\bar{x}_1 = 0$. Für $r = 1$ können wir keine Aussage treffen. Und für $1 < r < 3$ konvergieren die Lösungen gegen $\bar{x}_2$.

Als nächstes wolen wir Rekursionsgleichungen aufstellen, mit denen man Nullstellen einer gegebenen Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ bestimmen kann.
Ein erster Ansatz dafür könnte die Betrachtung der Rekursionsgleichung

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n) = g(x_n)$$

sein. Der Fixpunkt dieser Gleichung ist durch $\bar{x} = \bar{x} + f(\bar{x})$, also durch $f(\bar{x}) = 0$ gegeben. Allerdings konvergiert die Lösung der Folge nur dann gegen $\bar{x}$, wenn $|g'(\bar{x})| = |f'(\bar{x}) + 1| \leq 1$ ist. Dies ist eine relativ starke Einschränkung an die Funktion und liefert im allgemeinen keine Lösung des Problems.

Einen besseren Anasatz liefert das folgende geometrisch motivierte Verfahren:
Ausgehend von einer ersten Näherung x_0 der gesuchten Nullstelle berechnen wir eine bessere Näherung, indem wir die Tangente von f an x_0 bestimmen und deren Nullstelle x_1 ausrechnen. Dies wird nun mit x_1 wiederholt bis wir eine ausreichend gute Näherung der gesuchten Nullstelle gefunden haben (s. Abb. 6.6).
Zum Aufstellen der Rekursionsgleichung sei die n-te Näherung x_n der Nullstelle gegeben.

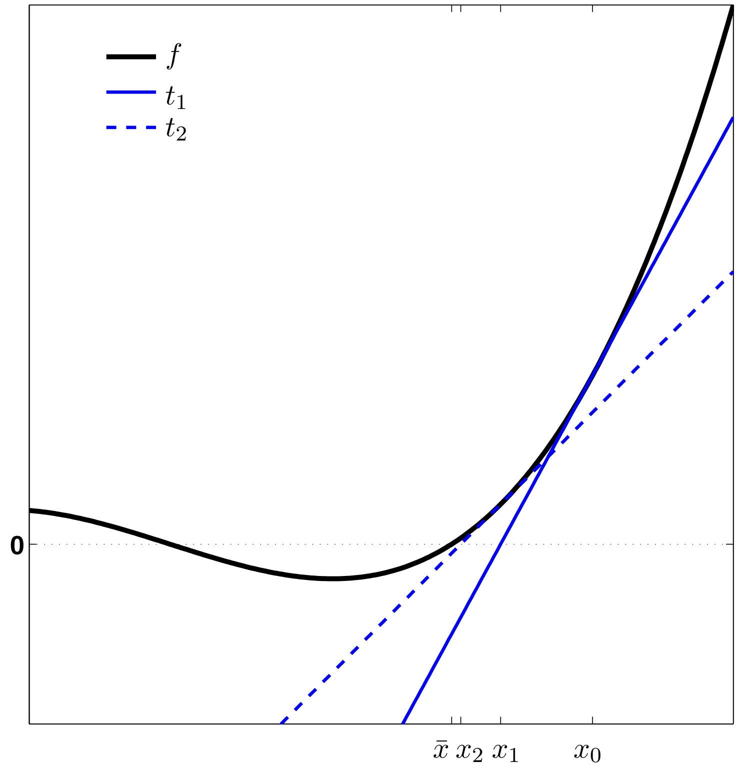

Abbildung 6.6.: Newton-Iteration zur Bestimmung der Nullstelle der Funktion f. Die erste Näherung x_0 ist noch sehr grob, aber bereits die zweite Näherung x_1 ist schon erheblich besser.

Die Tangente von f an den Punkt x_n ist durch die Gleichung

$$t(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

gegeben. Die nächste Näherung x_{n+1} ist als Nullstelle von t, also $t(x_{n+1}) = 0$ definiert und lässt sich, unter der Annahme, dass $f'(x) \neq 0$, durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

berechnen. Die Berechnung von Nullstellen mit dieser Rekursionsgleichung wird als **Newton-Verfahren** bezeichnet.
Der Fixpunkt dieser Rekursionsgleichung ist durch

$$\bar{x} = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \quad \Rightarrow \quad \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(\bar{x}) = 0$$

gegeben, das heißt er ist eine Nullstelle von f.
Wir bezeichnen mit

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

und berechnen die erste Ableitung

$$g'(x) = 1 - \left(\frac{f'(x)}{f'(x)} - \frac{f(x)f'(x)}{f''(x)} \right) = \frac{f(x)f'(x)}{f''(x)}.$$

Diese ist nun ausgewertet an dem Fixpunkt $\bar{x}$ mit $f(\bar{x}) = 0$ durch

$$g(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x})f'(\bar{x})}{f''(\bar{x})} = 0.$$

Wobei wir hier voraussetzen müssen, dass $f''(\bar{x}) \neq 0$ ist. Der Fixpunktsatz garantiert uns somit die Konvergenz der Folge für Anfangswerte in einer gewissen Umgebung des Fixpunktes gegen den Fixpunkt.

Satz 6.4.4 (Newton-Verfahren)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und es gibt ein $\bar{x} \in (a, b)$ für das $f(\bar{x}) = 0$ gilt. Seien

$$m = \min_{a \leq x \leq b} \left| f'(x) \right| > 0 \quad \text{und} \quad M = \max_{a \leq x \leq b} \left| f''(x) \right|.$$

Sei $\rho > 0$ so gewählt, dass

$$q := \frac{M}{2m} \rho < 1$$

und $[\bar{x} - \rho, \bar{x} + \rho] \subseteq [a, b]$.
Dann ist für jedes $x_0 \in [\bar{x} - \rho, \bar{x} + \rho]$ die Newton-Iteration

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

definiert und konvergiert gegen $\bar{x}$.
Es gilt die *a priori*-Fehlerabschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{2m}{M} q^{2^n}$$

und die *a posteriori*-Fehlerabschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{m} |f(x_n)|$$

Beispiel 6.4.5 Wir wollen die k-te Wurzel der Zahl $a > 0$ bestimmen. Diese ist Nullstelle von $f(x) = x^k - a$. Da die Ableitung durch $f'(x) = kx^{k-1}$ gegeben ist, erhalten wir aus dem Newton-Verfahren die folgende Rekursionsgleichung

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}} = \frac{1}{k} \left((k-1)x_n \right) + \frac{a}{x_n^{k-1}}.$$

Insbesondere ergibt sich zur Berechnung von $\sqrt{2}$ die Gleichung

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right). \tag{6.13}$$

Wir wollen jetzt die Rekursionsgleichung (6.13) mithilfe des Fixpunktsatzes für Anfangswerte aus dem Intervall $[1,2]$ untersuchen. Wir betrachten die Funktion

$$f : [1,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Wir wollen zeigen, dass dies eine kontraktive Selbstabbildung ist. Dafür berechnen wor die ersten beiden Ableitungen von f

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right), \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

und berechnen Minimum und Maximum von f im Intervall $[1,2]$.

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm\sqrt{2}.$$

Nur die positive Wurzel liegt in $[1,2]$ und ist ein Minimum, da $f''(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$. Der Wert von f am Minimum ist durch $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \approx 1.42...$ gegeben. Auf dem kompakten Intervall $[1,2]$ hat f aber auch ein Maximum, das dann zwangsläufig auf dem Rand liegen muss. Es gilt

$$f(1) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2}, \quad f(2) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2},$$

also sind beide Randpunkte Maxima. Das Bild der Abbildung f sind nun alle Werte zwischen Minimum und Maximum, also das Intervall $[\sqrt{2}, 1.5] \subset [1,2]$. Somit ist f eine Selbstabbildung.

Um zu zeigen, dass f eine Kontaktion ist, betrachten wir die erste Ableitung. Diese ist monoton wachsend, da $f''(x) > 0$ für alle $x \in [1,2]$. Minimum und Maximum von f' liegen also auf dem Rand und berechnen sich zu $f'(1) = -\frac{1}{2}$ und $f'(2) = \frac{1}{4}$. Also ist die Lipschitzkonstante L von f gleich

$$L = \sup_{x\in[1,2]} |f'(x)| = \max\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\} = \frac{1}{2} < 1.$$

Der Fixpunkt der Rekursionsgleichung (6.13) ist die Lösung der Gleichung

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\left(\bar{x} + \frac{2}{\bar{x}}\right) \quad \Rightarrow \quad 2\bar{x} - \bar{x} = \frac{2}{\bar{x}} \quad \Rightarrow \quad \bar{x}^2 = 2.$$

Im Intervall $[1,2]$ hat diese Gleichung nur die Lösung $\bar{x} = \sqrt{2}$.